Correction des exercices de la feuille 6

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice VII

Supposons que A ou B est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est A.

- Si A ou B est vide alors $A+B$ est vide, dans ce cas A ou B ouvert implique $A+B$ ouvert.
- Sinon, soit $x \in A+B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. Comme A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A$. Alors $]a+b-\varepsilon, a+b+\varepsilon[\subset A+B$, ce qui donne

  $$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A+B$$

  donc $A+B$ est voisinage de x. Ainsi $A+B$ est un ouvert.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$, $A+B = \mathbb{R}$.