

Correction des exercices de la feuille 5

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice VI

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - x^2$.

1. Le réel e est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si $f(e) = e$ si et seulement si

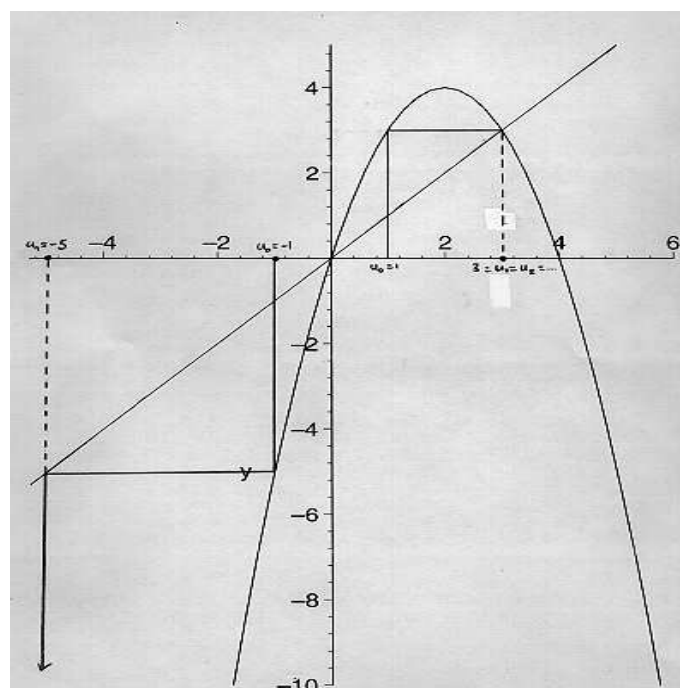
$$e^2 - 3e = 0$$

si et seulement si $e = 0$ ou $e = 3$.

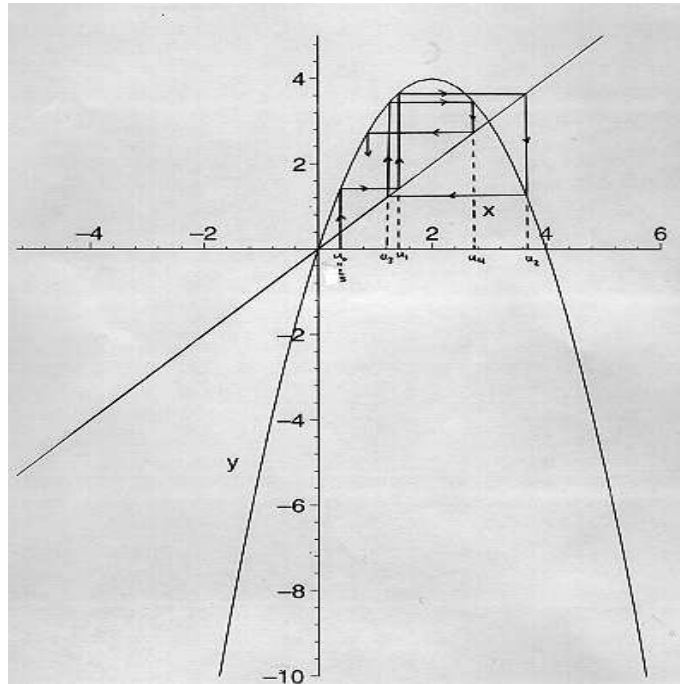
2. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 4 - 2x$.

- $|f'(0)| = 4 > 1$ donc 0 est un équilibre instable
- $|f'(3)| = |-2| > 1$ donc 3 est un équilibre instable

3. Les suites issues des conditions initiales $u_0 = -1$ et $u_0 = 1$ sont présentées ci-dessous. Remarquons que la suite est constante à partir du second terme dans ce dernier cas.



La suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ est présentée ci-dessous.



4.

a. Soit P_n la proposition $u_n = 4 \sin^2(2^n \alpha)$.

• P_0 est vraie puisque $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$.

• Supposons P_n vrai alors $u_n = 4 \sin^2(2^n \alpha)$ ce qui implique les 4 lignes suivantes

$$u_{n+1} = 16 \sin^2(2^n \alpha) - 16 \sin^4(2^n \alpha)$$

$$u_{n+1} = 4^2 \sin^2(2^n \alpha)(1 - \sin^2(2^n \alpha))$$

$$u_{n+1} = 4^2 \sin^2(2^n \alpha) \cos^2(2^n \alpha)$$

$$u_{n+1} = 4 \sin^2(2^{n+1} \alpha)$$

en utilisant que $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$. Par suite P_{n+1} est vérifiée.

b. Comme 0 est un équilibre instable, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = 0$, ce qui équivaut à $4 \sin^2(2^N \alpha) = 0$, ce qui équivaut à $\sin(2^N \alpha) = 0$, ce qui équivaut à $\exists k \in \mathbb{Z}, 2^N \alpha = k\pi$, ce qui équivaut à $\alpha = \frac{k\pi}{2^N}$.

c. Comme 3 est un équilibre instable, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = 3$, ce qui équivaut à $4 \sin^2(2^N \alpha) = 3$, ce qui équivaut à $\sin(2^N \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin(2^N \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui équivaut à $\exists \kappa \in \mathbb{Z}, 2^N \alpha = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$ ou $2^N \alpha = \frac{2\pi}{3} + \kappa\pi$ ce qui équivaut à $2^N \alpha = \frac{k}{3}\pi$ avec k non divisible par 3 puisque $\kappa = \frac{k}{3}$ ou $\kappa = \frac{2k}{3}$. Cela équivaut à $\alpha = \frac{k\pi}{3 \times 2^N}$ avec k entier et non divisible par 3.

5. Soit P_n l'hypothèse de récurrence $u_n \leq 4^n u_0$.

• P_0 est vraie puisque $u_0 \leq u_0$.

• Supposons P_n vraie alors $u_n \leq 4^n u_0$ donc $4u_n \leq 4^{n+1} u_0$. Comme $-u_n^2 \leq 0$ on obtient $4u_n - u_n^2 \leq 4^{n+1} u_0$ par suite $u_{n+1} \leq 4^{n+1} u_0$ donc P_{n+1} est vérifiée.

On a $\lim 4^n = +\infty$. Si $u_0 < 0$ alors $\lim 4^n u_0 = -\infty$ par suite $\lim u_n = -\infty$. De plus les racines de $4x - x^2$ sont 0 et 4, donc si $u_0 > 4$ alors $u_1 < 0$. De manière analogue à la question précédente on montre alors que $u_n \leq 4^{n-1} u_1$ et on conclut que $\lim u_n = -\infty$.