Correction des exercices de la feuille 2

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice I

1. Soit $n \geq 2$ un entier, on a

$$\begin{aligned} v_n &= \ln u_n \\ &= \ln n! + n - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n \\ &= \ln n + \ln(n-1)! + n - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n \end{aligned}$$

et $v_{n-1} = \ln(n-1)! + n - 1 - (n-1)\ln(n-1) - \frac{1}{2}\ln(n-1)$ donc

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} - n\right) \ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n-1) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) (\ln(n-1) - \ln n) + 1 \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n) \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par suite f est croissante sur $]1, +\infty[$. En écrivant $f(x)$ sous la forme $\frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln \frac{x-1}{x}$ il vient $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in]1, +\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme f est croissante, on en déduit

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, \ f(x) \geq f(x_0)$$

donc la limite de f en $+\infty$ est suprérieur à $f(x_0) > 0$. Cela est contradictoire avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **Fin du raisonnement par l'absurde**. Comme $\exists x_0 \in]1, +\infty[, \ f(x_0) > 0$ n'est pas vrai on peut affirmer que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

Pour $n \geq 2$ on a $v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)$ donc $v_n - v_{n-1} < 0$ ainsi $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante. Comme $u_n = \exp v_n$ et que exp est strictement croissante, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante également.

3. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel positif. Il sera noté C dans la suite.

4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc pour tout entier $k \geq 2$ on a

$$\forall x \in [k-1, k],\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

donc

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx$$

et comme $k - (k-1) = 1$ il vient

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx \tag{1}$$

Graphiquement cela sigifie que l'aire du rectangle dont les sommets sont $(k-1, 0)$, $(k-1, \frac{1}{k^2})$, $(k, \frac{1}{k^2})$, $(k, 0)$ est inférieure à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abcsisse et les droites d'équations $x = k-1$ et $x = k$. En sommant les équations (1) pour k entier dans $[2, n]$ il vient

$$w_n \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2} dx$$

Nous pourrions également faire un raisonnement par récurrence. Graphiquement cela sigifie que la somme des aires des rectangles qui se situent sous la courbe est inférieure à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abcsisse et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

5. Soit $n \geq 1$ un entier. D'une part

$$w_n \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

donc $(w_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1, d'autre part

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc $(w_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Ainsi cette suite converge vers une limite inférieure à 1. (Cette valeur est $\frac{\pi^2}{6} - 1$)

6. Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

elle est dérivable sur son domaine de définition et sa dérivée vaut

$$g'(x) = f'(x) - \frac{10x(x - \frac{1}{2}) + x^2}{(5x^2(x - \frac{1}{2}))^2}$$

finalement on a

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)(x - \frac{1}{2})^2}$$

Cette quantité est négative sur $]1, +\infty[$ donc g est décroissante sur cet intervalle. En outre $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Comme dans l'exercice I, on en déduit que

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ g(x) \geq 0$$

donc

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) \geq -\frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

7. Pour $k \geq 2$ entier on a

$$v_k - v_{k-1} \geq \left(k - \frac{1}{2}\right) f(k) \geq -\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{5k^2(k - \frac{1}{2})} \geq -\frac{1}{5k^2}$$

8. Soit (P_n) la proposition "$v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$".

- (P_2) est vraie puisque

$$v_2 = \ln \frac{2e^2}{4\sqrt{2}} = 2 - \ln(2\sqrt{2}) \geq \frac{19}{20} = -\frac{1}{5}w_2 + 1$$

- Supposons (P_n) vraie, et $n \geq 2$ alors $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$ ce qui implique les 4 lignes suivantes

$$\begin{aligned} v_n + (v_{n+1} - v_n) &\geq -\frac{1}{5}w_n + (v_{n+1} - v_n) + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_n + (v_{n+1} - v_n) + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_n - \frac{1}{5(n+1)^2} + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_{n+1} + 1 \end{aligned}$$

  donc (P_{n+1}) est vraie.

Cela établit l'inégalité souhaitée par récurrence.

9. Comme $w_n \geq 1$ on a $-\frac{1}{5}w_n \geq -\frac{1}{5}$ donc $v_n \geq \frac{4}{5}$. Ainsi $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par $\frac{4}{5}$, elle converge donc vers un réel $l \geq \frac{4}{5}$. Comme $u_n = \exp v_n$ et que exp est continue on a $\lim u_n \geq \exp \frac{4}{5}$ donc $C \geq \exp \frac{4}{5}$.

10. On a

$$\lim \frac{n!\, e^n}{Cn^n\sqrt{n}} = 1$$

donc

$$\lim \frac{n!}{C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$$

ainsi

$$n! \sim C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Il a été montré que $C > \exp \frac{4}{5}$, ce réel est $\sqrt{2\pi}$.

Exercice III

Soit α un réel et $v_n = u_n + \alpha$ alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = au_n + b + \alpha = a(v_n - \alpha) + b + \alpha = av_n + \alpha(1-a) + b$$

posons alors $\alpha = \frac{b}{a-1}$, il vient que (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme v_0 ainsi $v_n = v_0 a^n$ donc

$$u_n + \alpha = (u_0 + \alpha)a^n$$

donc

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

Exercice IV

La suite (u_n) converge, donc elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon = \frac{1}{5}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour p et q des entiers avec $q \geq p \geq N$ on a $|u_q - u_p| < \varepsilon$. En particulier pour $p = N$ il vient

$$u_q \in \left] u_N - \frac{1}{5}, u_N + \frac{1}{5} \right[$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \frac{1}{n_0}$ et alors

$$u_q \in \left] \frac{1}{n_0} - \frac{1}{5}, \frac{1}{n_0} + \frac{1}{5} \right[\cap A_5$$

or si $(n_1, n_2) \in [\![1, 4]\!]^2 \Rightarrow |\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}| < \frac{1}{5}$ entraine $n_1 = n_2$. Ainsi $u_q = \frac{1}{n_0}$. On a démontré que pour tout $q \geq N$ on a $u_q = \frac{1}{n_0}$ donc (u_n) est constante à partir du terme d'indice N.

Ce résulat se généralise à un $s \in \mathbb{N}^*$ quelconque. En remplacant 4 par s et $\frac{1}{5}$ par $\frac{1}{s+1}$ dans la démonstration précédente.