Interrogation du 11/01/2007

Corrigé

Exercice I

Soit $\hat{u}$ un test et $\theta > 0$ un réel, on a

$$A(u + \theta\hat{(u)}) = \int_\Omega [u^4 + 4\theta u^3 \hat{u} + \theta^2 f(u, \hat{u})] \, d\Omega$$

où f ne dépend pas de $theta$, on a alors

$$\frac{A(u + \theta\hat{(u)}) - A(u)}{\theta} = \int_\Omega 4\theta u^3 \hat{u} \, d\Omega + \theta \int_\Omega f(u, \hat{u}) \, d\Omega$$

on a alors

$$A(u; \hat{u}) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(u + \theta\hat{(u)}) - A(u)}{\theta} = \int_\Omega 4\theta u^3 \hat{u} \, d\Omega$$

Exercice II

Soit u, u', et v des fonctions de $L^2(\Omega)$ et λ un réel.

1. On a

$$\phi_\alpha(u, v) = \int_\Omega \alpha uv \, d\Omega = \int_\Omega \alpha vu \, d\Omega = \phi_\alpha(v, u)$$

donc ϕ_α est symétrique. En outre

$$\phi_\alpha(u + \lambda u', v) = \int_\Omega \alpha(u + \lambda u')v \, d\Omega = \int_\Omega \alpha uv \, d\Omega + \int_\Omega \alpha\lambda u'v \, d\Omega = \phi_\alpha(u, v) + \lambda\phi_\alpha(u', v)$$

donc ϕ_α est bilinéaire symétrique.

2. On a

$$|\phi_\alpha(u, v)| = |\alpha| \left| \int_\Omega uv \, d\Omega \right| \leq |\alpha| \left(\int_\Omega u^2 \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

en vertu de Cauchy-Schwartz. Il en résulte

$$|\phi_\alpha(u, v)| \leq |\alpha| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

ainsi ϕ_α est continue sur $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

3. On a

$$\phi_\alpha(u, u) \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

donc ϕ_α est coercive si $\alpha > 0$. Si $\alpha \leq 0$ alors $\phi_\alpha(u, u) \leq 0$ donc ϕ_α n'est pas coercive. Ainsi ϕ_α est coercice si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice III

Oui. Démonstration :

On a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_{i_0}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \phi}{\partial x_{i_0}}$$

En vertu de (iii) on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_{i_0}} \in H^{-1}(\Omega)$$

en outre

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \phi}{\partial x_{i_0}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_0}}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

en vertu de (i), $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$ donc $\frac{\partial}{\partial x_{i_0}}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \in H^{-1}(\Omega)$. Par suite

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \in H^{-1}(\Omega)$$

ainsi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$$

L'utilisation de (ii) donne alors

$$\psi \in H^1(\Omega)$$