Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 3906 – Contrôle actif de structures

S10 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2007

Interrogation du 7/12/2006

Durée de l'épreuve : 45 minutes

L'usage des documents est autorisé, l'usage des calculatrices est interdit. Les deux exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (14 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble non vide et régulier. On note $\Gamma = \partial\Omega$ et n un vecteur normal unitaire à Γ. On note

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \text{ et } t = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

On considère deux fonctions w et $\hat{w}$ régulières, définies sur Ω. Ces fonctions ne s'annulent pas nécessairement sur Γ.

1. Exprimer

$$\int_\Omega \operatorname{div}((D\nabla w)\nabla\hat{w} - \Delta w \nabla\hat{w})\, d\Omega$$

comme une intégrale sur Γ.

2. Démontrer que

$$\langle (D\nabla w)t, n\rangle = (n_1^2 - n_2^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)$$

3. Démontrer que

$$\langle (D\nabla w)n, n\rangle - \Delta w = 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - n_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

4. En déduire que

$$\int_\Gamma (\langle (D\nabla w)\nabla\hat{w}, n\rangle - \Delta w \,\langle \nabla\hat{w}, n\rangle)\, d\Gamma = \int_\Gamma \left(B_1 w \frac{\partial\hat{w}}{\partial n} - \hat{w} B_2 w\right) d\Gamma$$

où B_1 et B_2 sont les opérateur définis dans le cours.

5. Donner l'expression de

$$\int_\Omega \left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1^2}\right) d\Omega$$

en fonction d'une intégrale de frontière faisant intervenir w, $B_1 w$, $B_2 w$, $\hat{w}$ et $\frac{\partial\hat{w}}{\partial n}$.

Exercice II (6 points)

On considère une plaque rectangulaire P homogène de densité ρ, isotrope avec un coefficient de Poisson ν et un module d'Young E. La longeur de la plaque est L, sa largeur est l et son épaisseur est h. Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) font référence à un repère orienté dans la longeur-largeur-épaisseur. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, on suppose que le point (x_1, x_2, x_3) de la plaque P à l'instant 0 est au point $(exp(-t)x_1, x_2, x_3)$ à l'instant t.

1. Ecrire la déformation U correspondante.

2. Calculer l'energie cinétique de la plaque.

3. Calculer le tenseur ϵ linéarisé associé et l'énergie elastique de la plaque.