

Examen du 30/01/2007

Corrigé

Exercice I

Soit $\phi \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi + \partial_2^2\phi)^2 \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 + 2\partial_1^2\phi\partial_2^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 - 2 \int_{\Omega} \partial_1\phi\partial_1\partial_2^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 + 2 \int_{\Omega} \phi\partial_1^2\partial_2^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 + 2 \int_{\Omega} \phi\partial_2^2\partial_1^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 - 2 \int_{\Omega} \partial_2\phi\partial_2\partial_1^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 + 2 \int_{\Omega} \partial_2^2\phi\partial_1^2\phi \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1^2\phi)^2 + (\partial_2^2\phi)^2 + 2\partial_2^2\phi\partial_1^2\phi \\ &= \|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.

On remarquera que la dernière égalité est vraie et que les intégrales de bord sont nulles puisque $\phi \in H_0^2(\Omega)$.

Exercice II

1. On a

$$a^2 + b^2 + 2\nu ab = (a + \nu b)^2 + (1 - \nu^2)b^2$$

Or $0 < \nu < \frac{1}{2}$ donc $1 - \nu^2 > \frac{3}{4} > 0$, ainsi

$$(a + \nu b)^2 + (1 - \nu^2)b^2 \leq 0$$

entraîne

$$(a + \nu b)^2 + (1 - \nu^2)b^2 = 0$$

ce qui entraîne $a + \nu b = 0$ et $b = 0$, c'est-à-dire

$$a = b = 0$$

2. On a

$$A_0(\phi, \psi) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

ainsi $A_0(\phi, \psi) = 0$ entraine

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2$$

en particulier

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \leq 0$$

La question 1 permet alors d'affirmer que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0$$

ce qui entraine alors

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 = 0$$

ce qui donne le résultat.

3. Soit $(\phi, \psi) \in \text{Ker } A_0$ alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0$$

donc il existe une fonction f et une fonction g telles que $\psi(x_1, x_2) = f(x_2)$ et $\phi(x_1, x_2) = g(x_1)$. Or

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

donc

$$\frac{df}{dx_2} = -\frac{dg}{dx_1}$$

ainsi cette quantité ne dépend ni de x_1 ni de x_2 donc il existe une constante β' telle que $\frac{df}{dx_2} = \beta'$ ce qui entraine l'existence d'une constante α' telle que $f(x_2) = \alpha' + \beta'x_2$. On en déduit

$$\psi(x_1, x_2) = \alpha' + \beta'x_2$$

de manière analogue, on obtient

$$\phi(x_1, x_2) = \alpha + \beta x_1$$

Réciproquement (ϕ, ψ) ainsi définis sont dans le noyau de A_0 lorsque $\beta = -\beta'$.

4. Si la plaque est encadrée alors le bord alors $\phi(x_1, x_2) = \alpha + \beta x_1 = 0$, comme cette expression est vraie pour au moins deux valeurs de x_1 distinctes, on en déduit que $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\phi = 0$. De manière analogue on obtient $\psi = 0$. On en déduit

$$\text{Ker } A_0 = \{0\}$$

Exercice III

1. Si la plaque n'est pas déformée alors $U = 0$ donc $\varepsilon = -f(\tau)I$. Lorsque $\tau = 0$ on a $\Upsilon = \Upsilon_0$ ce qui conduit à $\varepsilon = 0$ ainsi $-f(\tau)I = 0$ donc $f(\tau) = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \\
&= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}^\tau + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk}^0 - \varepsilon_{kk}^\tau) \delta_{ij} \right) \\
&= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1+\nu} \left(f(\tau) \delta_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} f(\tau) \delta_{kk} \delta_{ij} \right) \\
&= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1+\nu} \left(1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right) f(\tau) \delta_{ij} \\
&= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1+\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} f(\tau) \delta_{ij} \\
&= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1-2\nu} f(\tau) \delta_{ij}
\end{aligned}$$

3. On suppose que $\sigma_{33} = 0$ on a alors

$$\frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{33}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0) \right) - \frac{E}{1-2\nu} f(\tau) \delta_{ij} = 0$$

ce qui entraine

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{33}^0 = -\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} f(\tau)$$

d'où finalement

$$\varepsilon_{33}^0 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^0 - \frac{1+\nu}{1-\nu} f(\tau)$$

Alors

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{11}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^0 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} f(\tau) \right) - \frac{E}{1-2\nu} f(\tau)$$

on obtient

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{1-\nu} \varepsilon_{11}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^0 \right) + \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} (\nu - 1 + 1) f(\tau)$$

ainsi

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{1-\nu} \varepsilon_{11}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^0 \right) - \frac{E}{1-\nu} f(\tau)$$

de manière analogue

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{1-\nu} \varepsilon_{22}^0 \right) - \frac{E}{1-\nu} f(\tau)$$

Enfin, les autres termes se calculent comme d'habitude

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}^0$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13}^0$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{23}^0$$

4. On fait l'hypothèse de Kirchhoff-Love. En notant \mathcal{E}_p^0 l'expression provenant de ε^0 et calculée dans le cours, on a

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^0 - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_P f(\tau) \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}^0)^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{22}^0)^2 \right]$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^0 - \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} f(\tau) [(\varepsilon_{11}^0)^2 + (\varepsilon_{22}^0)^2]$$

ainsi

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^0 - \frac{E}{2(1-\nu)} \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -f(\tau)x_3 \right) \Delta w$$

donc

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{h^3}{12} \Theta \Delta w$$

d'où

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^0 + \frac{Eh^3}{24(1-\nu)} \Theta \Delta w$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^B = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right. \\ \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + (1+\nu) \Theta \Delta w \right] d\Omega \end{aligned}$$

5. Le terme supplémentaire est

$$\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (1+\nu) \Theta \Delta w$$

Sa dérivée de Gâteaux dans la direction d'un test \hat{w} est

$$\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (1+\nu) (\Theta \Delta) \hat{w}$$

ce qui est égal à

$$\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (1+\nu) (\Delta \Theta) \hat{w}$$

On obtient alors le terme suivant dans l'EDP :

$$\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} (1+\nu) \Delta \Theta$$

ce qui donne

$$\rho h w'' - \frac{\rho h^3}{12} \Delta w'' + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\Delta^2 w + \frac{1+\nu}{2} \Delta \Theta \right) = 0$$

avec les conditions initiales et de bord habituelles.