Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S10 – Année 2006-2007
ESI CS 3906 – Contrôle actif de structures | Promotion ESILV 2007

Examen du 30/01/2007

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des documents est autorisé, l'usage des calculatrices est interdit. Les exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. La note de cet examen ne pourra pas dépasser 20.

Exercice I (5 points)

Soit $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Montrer que

$$\varphi \mapsto \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme équivalente à la norme de $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$.

Exercice II (8 points)

Considérons une plaque modélisée par Mindlin-Timosenko. Notons

$$\begin{aligned} a_0(\phi,\psi;\hat{\phi},\hat{\psi}) &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_2}\right.\\ &\qquad\left.+\nu\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_1}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x_2}+\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_1}\right)\right] \end{aligned}$$

et $A_0(\phi,\psi)=a_0(\phi,\psi;\phi,\psi)$.

1. Soit $\nu\in]0,\frac{1}{2}[$. Montrer que si a et b sont des réels satisfaisant

$$a^2+b^2+2\nu ab\le 0$$

alors $a=b=0$.

2. Montrer que $A_0(\phi,\psi)=0$ entraine

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=0 \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial x_2}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}$$

3. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\,A_0=\{(\phi,\psi),\ \phi(x_1,x_2)=\alpha+\beta x_1,\ \psi(x_1,x_2)=\alpha'+\beta' x_2\}$$

où α, β, α', β' sont des réels.

4. Si la plaque est encastrée que peut-on dire de $\mathrm{Ker}\,A_0$?

Exercice III (12 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et régulier, $h > 0$ et

$$P = \Omega \times \left]-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right[$$

la plaque de surface moyenne Ω et d'épaisseur h, isotrope et homogème, encastrée sur le bord. On note $I = [0, T]$ un intervalle de temps. On suppose que les tenseurs ε et σ sont nuls lorsque la température de la plaque est la constante Υ_0 et que la plaque n'est pas déformée. On considère alors Υ l'application de $P \times I$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à $(x,t) \in P \times I$ la température au point x à l'instant t. On note $\tau(x,t) = \Upsilon(x,t) - \Upsilon_0$. Posons

$$\varepsilon^{\tau}_{ij} = f(\tau)\delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On suppose que la plaque est soumise à une déformation U et on pose

$$\varepsilon = \frac{1}{2}({}^tDU + DU) - \varepsilon^{\tau} = \varepsilon^0 - \varepsilon^{\tau}$$

On note Θ et $\tilde{\Theta}$ les résultantes thermiques définies par

$$\Theta = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f(\tau)dx_3 \quad \text{et} \quad \tilde{\Theta} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(\tau)dx_3$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Montrer que

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^0_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^0_{kk}\delta_{ij}\right) - \frac{E}{1-2\nu}f(\tau)\delta_{ij}$$

ou la convention de sommation des indices répétés à été utilisée.

3. On suppose que $\sigma_{33} = 0$, calculer σ_{11}, σ_{22} et σ_{ij} pour $i \neq j$.

4. On fait l'hypothèse de Kirchhoff-Love et on note (u_1, u_2, w) la déformation définie sur la surface moyenne. Soit $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle du système. Montrer que $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^S + \mathcal{E}_p^B$ où

$$\mathcal{E}_p^B = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + (1+\nu)\Theta\Delta w\right] d\Omega$$

et $\mathcal{E}_p^S$ est une expression ne faisant pas intervenir la variable w.

5. En déduire l'EDP gouvernant la relation entre le déplacement vertical de la plaque et une résultante thermique, en l'absence de chargement.