Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 302 – Compléments d'optimisation

S8 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2007

Feuille d'exercices 4

Optimisation sous contraintes

Exercice I

En utilisant la méthode du lagrangien[1] et les variables d'écart, déterminer le (ou les) points (x, y) qui maximise la fonction objectif f définie par

$$f(x, y) = 2y - x^2$$

sous les contraintes

$$g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

Retrouver ce résultat numériquement

Exercice II

Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles $n \times n$.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$, on note respectivement $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ les composantes de A et B à la ligne i et colonne j. montrer que φ définie par

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{i,j}$$

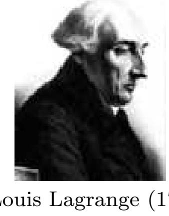
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n$. On suppose désormais que $\mathcal{M}_n$ est muni de ce produit scalaire.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (éventuellement complexes) de A et I la matrice identité d'ordre n. Montrer que $\det(I + tA) = 1 + t\,\mathrm{tr}(A) + t^2 f(A)$ où tr dénote la trace et f est une fonction de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$, indépendante de t.

3. Que vaut $\nabla \det(I)$.

4. Calculer numériquement le minimum du déterminant sous contrainte que la trace de la matrice soit égale à 1.

[1] Joseph-Louis Lagrange, mathématicien italien puis français, du XVIIIe et XIXe siècle. Il travailla dans les années 1790 au système métrique et enseigna à l'Ecole Polytechnique dont il participa à la fondation. Il excella dans toutes les disciplines d'analyse, de théorie des nombres et de mécanique celeste. En 1788 il publia *Mécanique analytique* qui est célébre pour l'utilisation des équations différentielles. La mécanique devient alors une branche des mathématiques. En 1797 il publia la première théorie des fonctions d'une variable réelle.



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)