

Interrogation du 12/10/2004

Corrigé

Exercice I

Calculons le gradient de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -4y + 4xy - y^2 \\ -4x - 2xy + 2x^2 \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} y(-4 + 4x - y) = 0 \\ x(-2 - y + x) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(-2 + x) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y(-4 - y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -4 + 4x - y = 0 \\ -2 - y + x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des points critiques de f est donc

$$\left\{ (0; 0), (0; -4), (2; 0), \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3} \right) \right\}$$

La matrice hessienne de f est

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 2y - 4 \\ 4x - 2y - 4 & -2x \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement négatif. Il s'agit d'un col.

$$Hf(0, -4) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement négatif. Il s'agit d'un col.

$$Hf(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement négatif. Il s'agit d'un col.

$$Hf(x, y) = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement positif et la trace négative. Il s'agit d'un maximum.

Exercice II

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, alors

$$g_\alpha(x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 2x^2) = x^2(\alpha - x)(\alpha - 2x) = 2x^4 - 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2$$

Cette fonction est polynomiale donc dérivable deux fois

$$\begin{aligned}g'_\alpha(x) &= 8x^3 - 9\alpha x^2 + 2\alpha^2 x \\g''_\alpha(x) &= 24x^2 - 18\alpha x + 2\alpha^2\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$ alors $g'_\alpha(0) = 0$ et $g''_\alpha(0) = 2\alpha^2 > 0$ donc 0 est un minimum. Si $\alpha = 0$ alors $g_\alpha(x) = 2x^4$ donc 0 est un minimum. Ainsi pour tout réel α , la fonction g_α admet un minimum en 0.

2. Si f admet un minimum en $(0; 0)$ alors g_α admet un minimum en 0, mais la réciproque n'a pas de raison d'être vraie.

3. Calculons le gradient de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x^3 - 6xy \\ -3x^2 + 2y \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} x(4x^2 - 3y) = 0 \\ -3x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x^2 \\ -3x^2 + \frac{8}{3}x^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y) = (0, 0)$.

4. La matrice hessienne de f est

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi La matrice hessienne de f est

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui admet 0 et 2 comme valeur propre. On ne peut pas conclure.

5. On a $f(0, 0) = 0$, d'autre part pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x, \alpha x^2) = x^4(\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

ainsi pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) &= -\frac{x^4}{4} < 0 \\f(x, 3x^2) &= 2x^4 > 0\end{aligned}$$

si bien que dans tout disque centré en $(0; 0)$ on peut trouver un point pour lequel la valeur de f est supérieur à $f(0; 0)$ et un un point pour lequel la valeur de f est inférieur à $f(0; 0)$. En conséquences $(0; 0)$ n'est pas un extremum de f . Par suite, f n'admet pas d'extremum dans \mathbb{R}^2 .

Exercice III

On a

$$\begin{aligned}q_{a,b,c}(x,y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\&= a \left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 \right) \\&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2 \right) \\&= a \left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}y^2\end{aligned}$$

Comme $a > 0$ et $4ac - b^2 > 0$

- Si $k < 0$ alors la courbe de niveau est vide
- Si $k = 0$ alors la courbe de niveau est constituée du point $(0; 0)$.
- Sinon $k > 0$ alors $q_{a,b,c}(x,y) = 0$ équivaut à

$$a \left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}y^2 = k$$

ce qui équivaut à

$$\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 = \frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2 \geq 0 \\ x + \frac{b}{2a}y = \sqrt{\frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2} \text{ ou } x + \frac{b}{2a}y = -\sqrt{\frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2} - \frac{b}{2a}y \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{k}{a} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2} - \frac{b}{2a}y \\ y \in \left[-\sqrt{\frac{4ak}{4ac - b^2}}, \sqrt{\frac{4ak}{4ac - b^2}} \right] \end{cases}$$