

Interrogation du 12/10/2004

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice I (7 points)

Considérons la fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = -xy(4 - 2x + y)$$

Trouver les extrema de f .

Exercice II (8 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (y - x^2)(y - 2x^2) \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction g_α définie sur \mathbb{R} par $g_\alpha(x) = f(x, \alpha x)$ admet un minimum local en 0.
2. Peut-on en déduire que la fonction f admet un minimum local en $(0; 0)$?
3. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f .
4. Calculer la matrice hessienne de f . Peut-on conclure en ce qui concerne la nature du (des) point(s) critique(s) ?
5. Montrer que f n'admet pas d'extremum dans \mathbb{R}^2 .

Exercice III (5 points)

Considérons l'application $q_{a,b,c}$ définie sur \mathbb{R}^2 par

$$q_{a,b,c}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

où a, b, c sont trois réels tels que $a > 0$ et $b^2 < 4ac$.

Déterminer l'équation de la courbes de niveau de $q_{a,b,c}$ d'altitude k . On exprimera y et fonction de x ou bien x en fonction de y . On pourra discuter selon $k \in \mathbb{R}$.