Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2007

Examen du 16/11/2004

Corrigé

Exercice I

1. Calculons le gradient de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2\alpha x y^2 \\ 4y^3 + 2\alpha x^2 y \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} x(2x^2 + \alpha y^2) = 0 \\ y(2y^2 + \alpha x^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{2}\alpha y^2 \\ y^2 = -\frac{1}{2}\alpha x^2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x,y) = (0;0)$.

2. La matrice hessienne de f est

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2\alpha y^2 & 4\alpha x y \\ 4\alpha x y & 12y^2 + 2\alpha x^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne ne permet pas de conclure quant à la nature des points critiques.

3. On a

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^4 + y^4 + \alpha x^2 y^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{\alpha}{2} y^2\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^4 + y^4 \\ &= \left(x^2 + \frac{\alpha}{2} y^2\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) y^4 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha}{2} \\ B = 1 - \frac{\alpha^2}{4} \end{cases}$$

Remarquons que $|\alpha| \neq 2$ entraine $B \neq 0$.

4. Deux cas se présentent

- Si $B > 0$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ si bien que $(0;0)$ est un minimum de f.
- Si $B < 0$ alors comme $B = 1 - A^2$ on a $|A| > 1$. Considérons deux sous cas

- Si $A > 1$ alors $x^2 + Ay^2 \geq 0$ ainsi

$$x^2 + Ay^2 \geq Ay^2 \ \Rightarrow \ (x^2 + Ay^2)^2 \geq A^2 y^4$$

ainsi $f(x,y) \geq (A^2 + B)y^4 = y^4 \geq 0$ donc pour tout (x,y) on a $f(x,y) \geq f(0,0)$ si bien que $(0;0)$ est un minimum de f.
- Si $A < -1$ alors considérons x et y non nuls on a

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{-A}y, y) & = & By^4 < 0 \\ f(x,0) & = & x^4 > 0 \end{array}$$

si bien que dans tout disque centré en $(0;0)$ on peut trouver un point pour lequel la valeur de f est supérieure à $f(0;0)$ et un un point pour lequel la valeur de f est inférieure à $f(0;0)$. En conséquences $(0;0)$ n'est pas un extremum de f.

Les cas $B > 0$ et ($B < 0$ et $A > 1$) correspondent à $\alpha > -2$ et le cas $B < 0$ et $A < -1$ correspond à $\alpha < -2$.

Par suite $(0;0)$ est un minimum si et seulement si $\alpha > -2$.

Exercice II

1. Soit E l'ensemble des points admissibles. Le point $(x,y) \in E$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ 2x^2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 + z^2 = 2 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

ainsi $E = \big\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 2\big\}$.

2. Minimiser f dans E revient à minimiser $(y,z) \mapsto f(0,y,z)$ sous la contrainte $y^2 + z^2 = 2$. Cela revient à minimiser

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (y,z) & \mapsto & y + z \end{array}$$

sous la contrainte $G(y,z) = 0$ où $G(y,z) = y^2 + z^2 - 2$.

3. Soit L la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$L(y,z,\lambda) = y + z + \lambda(y^2 + z^2 - 2)$$

les points candidats à être minimum sont les points critiques de L, c'est-à-dire ceux qui annullent

$$\nabla L(y,z,\lambda) = \left(\begin{array}{c} 1 + 2y\lambda \\ 1 + 2z\lambda \\ y^2 + z^2 - 2 \end{array} \right)$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2y\lambda = 0 \\ 1 + 2z\lambda = 0 \\ y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} 1+2y\lambda=0 \\ (z-y)\lambda=0 \\ y^2+z^2-2=0 \end{array}\right.$$

comme $\lambda=0$ entraine $0=1$, le système précédent est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} 1+2y\lambda=0 \\ y=z \\ 2y^2-2=0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ z=1 \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ z=-1 \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

4. Considérons la matrice

$$L_{XX}(y,z,\lambda)=\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

alors $L_{XX}(1,1,-1/2)=-I$ qui a deux valeurs propres négatives et $L_{XX}(-1,-1,1/2)=I$ qui a deux valeurs propres positives. Le minimum de F sous la contrainte $G=0$ est obtenu en $(y,z)=(-1,-1)$ ainsi la solution au problème de minimisation est $(x,y,z)=(0,-1-1)$.

Exercice III

1. On a

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{x^2+y^2-4x\leq 0\} \\ & = & \{(x-2)^2+y^2\leq 4\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(2;0))^2\leq 4\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(2;0))\leq 2\} \end{array}$$

ainsi E est le disque (fermé) de centre $I=(2;0)$ et de rayon 2.

2. La fonction g est dérivable comme somme de fonction dérivable. On a $g'(t)=\exp(t)+1>0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En outre $\lim_{-\infty} g=-\infty$ et $\lim_{+\infty} g=+\infty$, la stricte monotonie de f et sa continuité permettent d'affirmer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par suite il existe une fonction réciproque de g que l'on note g^{-1}.

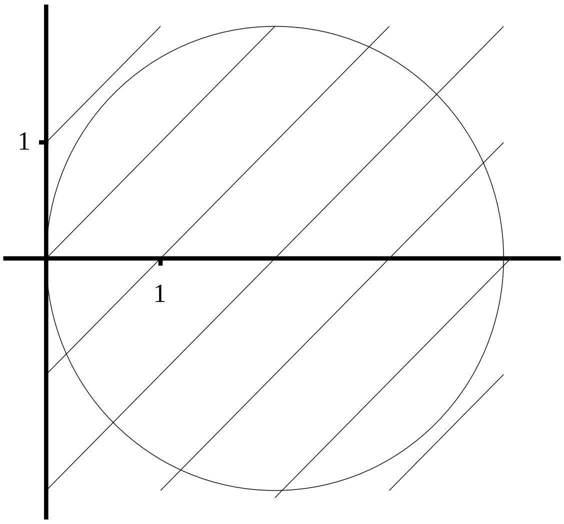
3. Soit $k\in\mathbb{R}$. Le point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ appartient à la courbe de niveau de f d'altitude k si et seulement si

$$f(x,y)=k \tag{1}$$

or $f(x,y)=g(x-y)$ donc (1) équivaut à $g(x-y)=k$, c'est-à-dire à $x-y=g^{-1}(k)$, ce qui équivaut à

$$y=x-g^{-1}(k) \tag{2}$$

Les courbes de niveau sont donc des droites parallèles à la première bissectrice ($y=x$). Elles sont représentées ci-après. Il convient de noter que les valeurs de k ne sont pas uniformes.



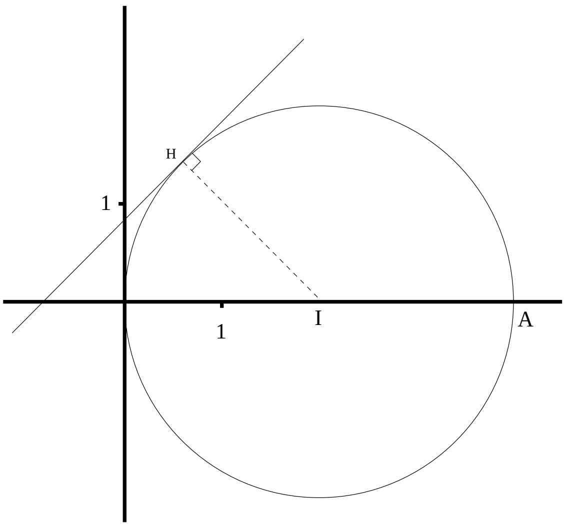
Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau, en outre il pointe dans la direction des courbes de niveau croissantes, il est donc orienté vers le bas et vers la droite.

4. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(x-y)+1 \\ -\exp(x-y)-1 \end{pmatrix}$$

ce gradient ne s'annulle jamais donc la fonction n'admet pas de point critique, elle n'admet donc pas d'extremum sur l'ouvert $\overset{\circ}{E}$.

5. La courbe de niveau de plus basse altitude tangente au cercle de centre $(2;0)$ et de rayon 2, est la droite parallèle à la prmière bissectrice tangente au cercle dans le demi-plan $y \geq 0$. Notons H la projection orthogonale du centre du cercle sur cette bissectrice et$A = (4;0)$. La droite (IH) est parallèle à la seconde bissectrice $(y = -x)$ si bien que $(IA, IH) = \frac{3\pi}{4}$. Par suite les coordonnées de H sont $(2 + 2\cos\frac{3\pi}{4}; 2\sin\frac{3\pi}{4})$, c'est-à-dire $(2-\sqrt{2};\sqrt{2})$. En ce point f admet un minimum dans E.



De manière analogue, f admet un maximum dans E en $(2+\sqrt{2};-\sqrt{2})$.