Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2007

Examen du 16/11/2004

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Tous les exercices sont indépendants. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (6 points)

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 + \alpha x^2 y^2 \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ est un paramètre.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Montrer que la matrice hessienne de f ne permet pas de conclure quant à la nature des points critiques.

3. Montrer que $f(x,y)$ peut s'écrire $(x^2+Ay^2)^2+By^4$ avec A et B deux réels que vous exprimerez en fonction de α.

4. En déduire la nature du ou des points critiques de f trouvé(s) à la question 1. On pourra discuter selon α, le cas échéant.

Exercice II (7 points)

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x + y + z \end{array}$$

et les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1 & : & x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ C_2 & : & x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{array} \right.$$

On considère le problème de minimisation de f sous les contraintes C_1 et C_2.

1. Montrer que l'ensemble des points admissibles est

$$E = \left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 2 \right\}$$

2. En déduire que le problème de minimisation est équivalent à un problème de minimisation d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ avec une seule contrainte.

3. En utilisant le Lagrangien, déterminez les points candidats à être minimum.

4. Résoudre le problème de minimisation.

Exercice III (7 points)

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^{x-y}+x-y \end{array}$$

et la contrainte

$$x^2+y^2-4x \leq 0$$

Dans la suite on notera E l'ensemble des points admissibles.

1. Montrer que E est un disque de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera les centre et le rayon.

2. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t + t$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque g^{-1}.

3. Esquisser les courbes de niveau de f dans l'ensemble E. Quelle est l'orientation du gradient de f ?

4. En déduire que f n'admet pas d'extrema dans $\mathring{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \mid x^2+y^2-4x < 0\}$.

5. Déterminer les extrema de f dans E.