

Devoir 2

Corrigé

Exercice I

1. Le point X satisfait

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, g_i(X) = b_i \quad (1)$$

et appartient donc à l'ensemble des contraintes E si et seulement si

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ dont la composante à la ligne i et colonne j est le réel $a_{i,j}$, et le vecteur $B \in \mathbb{R}^m$ dont la i -ème composante est le réel b_i . Le système ci-dessus équivaut à $AX = B$, par suite

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$$

2. Les formes linéaires g_1, \dots, g_m sont indépendantes, ainsi pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ on a¹

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad (3)$$

Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire e_j est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la j -ème qui est égale à 1. Ainsi $g_i(e_j) = a_{i,j}$. L'équation (3) entraîne

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(e_j) = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0 \right)$$

ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0 \right)$$

ce qui entraîne l'égalité vectorielle suivante :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0$$

ainsi la famille des vecteurs lignes

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$$

$$(a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n})$$

⋮

¹L'égalité de gauche est à prendre au sens des fonctions : $\forall X \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) = 0$

$$(a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,n})$$

est libre. Par suite, quitte à renuméroter les éléments,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

est inversible. Posons

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On a $A = (A_1 \ A_2)$ ainsi que $A_1 \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ inversible, et $A_2 \in \mathcal{M}_{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$.

3. En vertu de la question 1, on a $X \in E$ si et seulement si $AX = B$. Cela équivaut à

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = B$$

ce qui équivaut à $A_1 X_1 = B - A_2 X_2$. En vertu de la question 2, la matrice A_1 est inversible, l'équation précédente est équivalente à

$$X_1 = A_1^{-1}(B - A_2 X_2)$$

Exercice II

1. Soit φ l'application d'énie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ X_2 &\mapsto A_1^{-1}(B - A_2 X_2) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de φ est constante, on a

$$D\varphi(X_2) = -A_1^{-1}A_2$$

Comme $F(X_2) = f(\varphi(X_2), X_2)$ on a

$$\nabla F(X_2) = {}^t D\varphi(X_2) \nabla_1 f(\varphi(X_2), X_2) + \nabla_2 f(\varphi(X_2), X_2)$$

On a ${}^t D\varphi(X_2) = {}^t(-A_1^{-1}A_2) = -{}^t A_2 ({}^t A_1^{-1}) = -{}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1}$ d'où

$$\nabla F(X_2) = -{}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} \nabla_1 f(A_1^{-1}(B - A_2 X_2), X_2) + \nabla_2 f(A_1^{-1}(B - A_2 X_2), X_2)$$

2. Soit $X \in E$, en vertu de la question 3 de l'exercice I, on a $X_1 = A_1^{-1}(B - A_2 X_2)$ ainsi $f(X) = F(X_2)$. Si $X \in E$ minimise f alors X_2 minimise F ce qui entraîne $\nabla F(X_2) = 0$. La question 1 donne alors

$$-{}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} \nabla_1 f(A_1^{-1}(B - A_2 X_2), X_2) + \nabla_2 f(A_1^{-1}(B - A_2 X_2), X_2) = 0 \quad (4)$$

Posons

$$\Lambda = -({}^t A_1)^{-1} \nabla_1 f(A_1^{-1}(B - A_2 X_2), X_2)$$

ce vecteur appartient à \mathbb{R}^m . On a $\nabla_1 f(X) = -{}^t A_1 \Lambda$, c'est-à-dire

$$\nabla_1 f(X) + {}^t A_1 \Lambda = 0 \quad (5)$$

L'équation (4) donne

$${}^t A_2 \Lambda + \nabla_2 f(X) = 0 \quad (6)$$

Les equations (5) et (6) donnent le système cherché.

3. Il résulte de la question 2 que

$$\begin{pmatrix} \nabla_1 f(X) \\ \nabla_2 f(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^t A_1 \\ {}^t A_2 \end{pmatrix} \Lambda = 0$$

ce qui entraîne $\nabla f(x) + {}^t(A_1 \ A_2)\Lambda = 0$, c'est-à-dire $\nabla f(X) + {}^t A \Lambda = 0$.

4. Notons $(V)_k$ la k -ième composante d'un vecteur V . Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors

$$\begin{aligned} (\nabla L(X, \Lambda))_k &= \frac{\partial L}{\partial x_k}(X, \Lambda) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(X) - b_i) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(X) \\ &= (\nabla f(X))_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i,k} \\ &= (\nabla f(X))_k + ({}^t A \Lambda)_k \\ &= (\nabla f(X) + {}^t A \Lambda)_k \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket$, notons $l = k - n$ alors

$$\begin{aligned} (\nabla L(X, \Lambda))_k &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_l}(X, \Lambda) \\ &= g_l(X) - b_l \end{aligned}$$

Si X est un minimum de f sous les contraintes (1) alors (question 3) il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla f(X) + {}^t A \Lambda = 0$ donc les n premières composantes de $\nabla L(X, \Lambda)$ sont nulles. D'autre part X satisfait les contraintes (1) donc pour tout $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on a $g_l(X) = b_l$, ainsi les m dernières composantes de $\nabla L(X, \Lambda)$ sont nulles. Par suite

$$\nabla L(X, \Lambda) = 0$$

Exercice III

1. Considérons la fonction φ définie dans l'exercice II. Notons D_1 et D_2 respectivement les matrices jacobiniennes par rapport aux m premières et $n - m$ dernières variables.

$$\begin{aligned} D \nabla f(X_2) &= D(-{}^t A_2 ({}^t A_1^{-1} \nabla_1 f(\varphi(X_2), X_2) + \nabla_2 f(\varphi(X_2), X_2))) \\ &= -{}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} (D_1 \nabla_1 f(\varphi(X_2), X_2) (-A_1^{-1} A_2) + D_2 \nabla_1 f(\varphi(X_2), X_2) (-A_1^{-1} A_2) \\ &\quad + D_1 \nabla_2 f(\varphi(X_2), X_2) (-A_1^{-1} A_2) + D_2 \nabla_2 f(\varphi(X_2), X_2)) \\ &= {}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} H_{1,1} f(X) A_1^{-1} A_2 - {}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} H_{1,2} f(X) - H_{2,1} f(X) A_1^{-1} A_2 \\ &\quad + H_{2,2} f(X) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
{}^t y \mathbf{H} f(X) y &= {}^t \begin{pmatrix} -A_1^{-1} A_2 d \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,1} f(X) & \mathbf{H}_{1,2} f(X) \\ \mathbf{H}_{2,1} f(X) & \mathbf{H}_{2,2} f(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_1^{-1} A_2 d \\ d \end{pmatrix} \\
&= ({}^t -A_1^{-1} A_2 d \quad {}^t d) \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{1,1} f(X) A_1^{-1} A_2 d + \mathbf{H}_{1,2} f(X) d \\ -\mathbf{H}_{2,1} f(X) A_1^{-1} A_2 d + \mathbf{H}_{2,2} f(X) d \end{pmatrix} \\
&= {}^t (A_1^{-1} A_2 d) \mathbf{H}_{1,1} f(X) A_1^{-1} A_2 d - {}^t (A_1^{-1} A_2 d) \mathbf{H}_{1,2} f(X) d \\
&\quad - d \mathbf{H}_{2,1} f(X) A_1^{-1} A_2 d + {}^t d \mathbf{H}_{2,2} f(X) d \\
&= {}^t d ({}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} \mathbf{H}_{1,1} f(X) A_1^{-1} A_2 - {}^t A_2 ({}^t A_1)^{-1} \mathbf{H}_{1,2} f(X) \\
&\quad - \mathbf{H}_{2,1} f(X) A_1^{-1} A_2 + \mathbf{H}_{2,2} f(X)) d \\
&= {}^t d \mathbf{H} F(X) d
\end{aligned}$$

D'autre part $\mathbf{H} g_i(X) = 0$ puisque $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_s \partial x_t}(X) = 0$ pour tout s et pour tout t dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi

$${}^t y \left(\mathbf{H} f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{H} g_i(X) \right) y = {}^t d \mathbf{H} F(X_2) d$$

par suite $\mathbf{H} f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{H} g_i(X)$ définie positive entraîne² $\mathbf{H} F(X_2)$ définie positive.

3. Supposons que (X, Λ) soit un point critique de L alors X_2 est un point critique de F . On a

$$L_{XX}(X, \Lambda) = \mathbf{H} f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{H} g_i(X)$$

si $L_{XX}(X, \Lambda)$ est définie positive alors, en vertu de la question précédente, $\mathbf{H} f(X_2)$ est définie positive, donc F admet un minimum. Ainsi le point X est un minimum de f sous les contraintes (1).

²Il convient de remarquer que la réciproque est fautive