

Devoir 1

Corrigé

Exercice I

1. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le point (x, y) appartient à la courbe de niveau d’altitude k de f_0 si et seulement si $f_0(x, y) = k$, c’est-à-dire $x^2 = k$.

- Si $k > 0$, cette condition est équivalente à $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$. La courbe de niveau correspondante est la réunion de deux droites verticales.
- Si $k = 0$, cette condition est équivalente à $x = 0$. La courbe de niveau correspondante est l’axe des ordonnées.
- Si $k < 0$, cette condition n’est jamais satisfaite. La courbe de niveau est vide.

2. Soit $t > 0$, $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le point (x, y) appartient à la courbe de niveau d’altitude k de f_t si et seulement si $f_t(x, y) = k$, c’est-à-dire $x^2 + ty^2 = k$.

- Si $k > 0$, cette condition est équivalente à¹ $y = \sqrt{\frac{k-x^2}{t}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{k-x^2}{t}}$ avec $x \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$.
- Si $k = 0$, cette condition est équivalente à $x = y = 0$ puisqu’une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres l’est.
- Si $k < 0$, cette condition n’est jamais satisfaite. La courbe de niveau est vide

3. Soit $t < 0$, $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le point (x, y) appartient à la courbe de niveau d’altitude k de f_t si et seulement si $f_t(x, y) = k$, c’est-à-dire $x^2 + ty^2 = k$.

- Si $k > 0$, cette condition est équivalente à² $y = \sqrt{\frac{x^2-k}{-t}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^2-k}{-t}}$ avec $x \in]-\infty, -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}, +\infty[$. (Il convient de rappeler que $-t > 0$).
- Si $k = 0$, cette condition est équivalente à $(x - \sqrt{-ty})(x + \sqrt{-ty}) = 0$ c’est-à-dire $y = \frac{1}{\sqrt{-t}}x$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{-t}}x$. (Il convient de rappeler que $-t > 0$). La courbe de niveau correspondante est la réunion de deux droites.
- Si $k < 0$, cette condition est équivalente à $y = \sqrt{\frac{x^2-k}{-t}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^2-k}{-t}}$ avec $x \in \mathbb{R}$. (Il convient de rappeler que $-t > 0$ et $-k > 0$).

4. Considérons le cas $t = 0$. Les courbes de niveau sont une réunion de droites.

Les courbes d’altitude strictement positives sont constituées de deux droites : l’une dans le demi-plan $x > 0$ et l’autre dans le demi-plan $x < 0$. Le graphe de la fonction f coupé par le plan d’équation $z = 1$ est présenté figure 2, il illustre le fait que la courbe de niveau d’altitude 1 est la réunion de deux droites.

La courbe de niveau d’altitude 0 est l’axe des ordonnées et il n’y a pas de courbes de niveau d’altitude négative (au sens où ces courbes de niveau sont vides). On obtient la figure 1 à la page suivante.

¹On dit que cet ensemble de point est une ellipse

²On dit que cet ensemble de point est une hyperbole

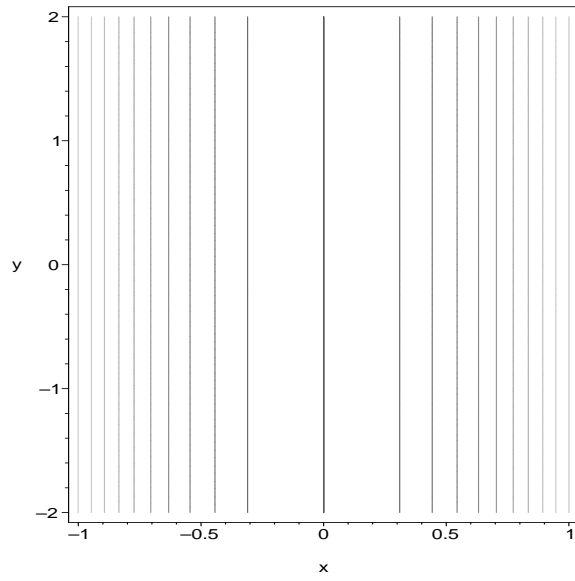


Figure 1: Courbes de niveau de f_0

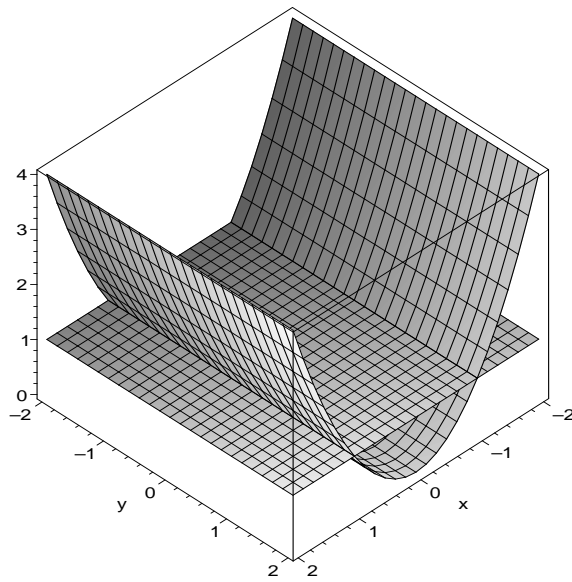


Figure 2: Graphe de f_0 coupé par le plan d'équation $z = 1$

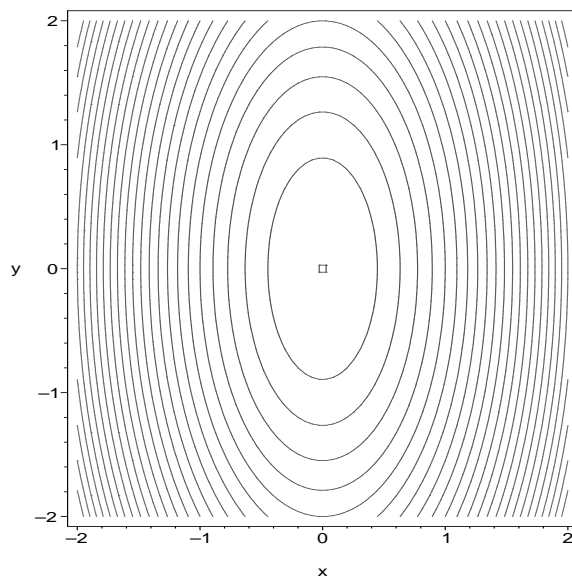


Figure 3: Courbes de niveau de $f_{\frac{1}{4}}$

Considérons le cas $t > 0$. La courbe de niveau d'altitude 0 est le point $(0; 0)$ et il n'y a pas de courbe de niveau d'altitude négative.

Pour tracer les courbes de niveau d'altitude $k > 0$ on étudie les fonctions

$$\begin{aligned}\varphi_t &: x \mapsto \sqrt{\frac{k-x^2}{t}} \\ \psi_t &: x \mapsto -\sqrt{\frac{k-x^2}{t}}\end{aligned}$$

qui sont définies sur $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Ces fonctions admettent des tangentes verticales en $-\sqrt{k}$ et \sqrt{k} . L'étude de la dérivée permet d'affirmer que φ_t est croissante sur $[-\sqrt{k}, 0]$ et décroissante sur $[0, \sqrt{k}]$ et que ψ_t est décroissante sur $[-\sqrt{k}, 0]$ et croissante sur $[0, \sqrt{k}]$. On obtient les figures 3, 6, 7 ci-après.

Il convient de remarquer que plus t est petit, plus $\varphi_t(0) = \sqrt{k/t}$ est grand et $\psi_t(0) = -\sqrt{k/t}$ est petit (négatif et grand en valeur absolue) ce qui explique que les courbes soient "étirées" verticalement. *A contrario*, plus t est grand plus les courbes sont "étirées" horizontalement.

A titre d'illustration le graphe de $f_{\frac{1}{4}}$ coupé par le plan d'équation $z = 2$ est présenté sous deux angles de vues différents, figures 4 et 5.

Considérons le cas $t < 0$. La courbe de niveau d'altitude 0 est la réunion de deux droites. Comme précédemment, l'étude des fonctions (d'une variable) permet de tracer les courbes de niveau. Il convient de remarquer que sur ces graphes, les courbes de niveau d'altitudes positives se trouvent de dans le secteur de "gauche" et de "droite". Les courbes de niveau d'altitudes négatives se trouvent de dans le secteur "supérieur" et "inférieur". On obtient les figures 8, 9, 10 ci-après. Il convient de remarquer que plus t est grand, plus l'angle des secteurs de "droite" et de "gauche" est aigu.

Soit $\lambda \neq 0$ un réel, il convient de remarquer que la représentation des courbes de niveau de λf_t se déduit des courbes de niveau de f_t , en divisant les altitudes par λ .

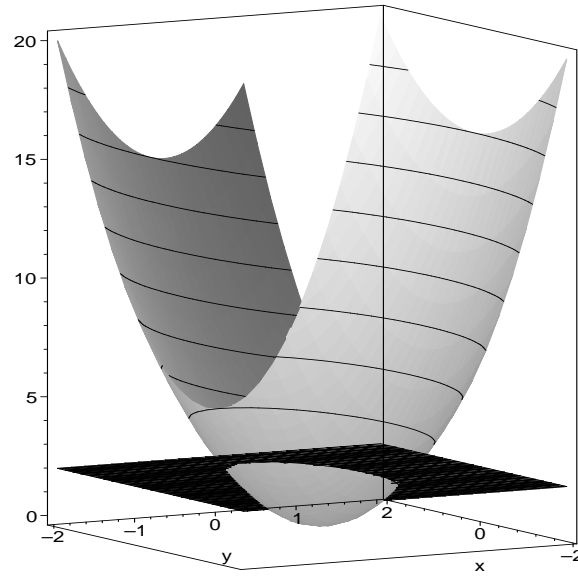


Figure 4: Graphe de $f_{\frac{1}{4}}$ coupé par le plan d'équation $z = 2$

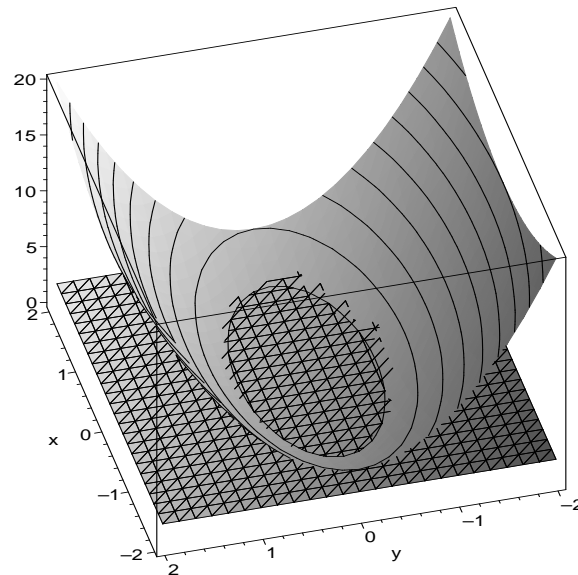


Figure 5: Graphe de $f_{\frac{1}{4}}$ coupé par le plan d'équation $z = 2$

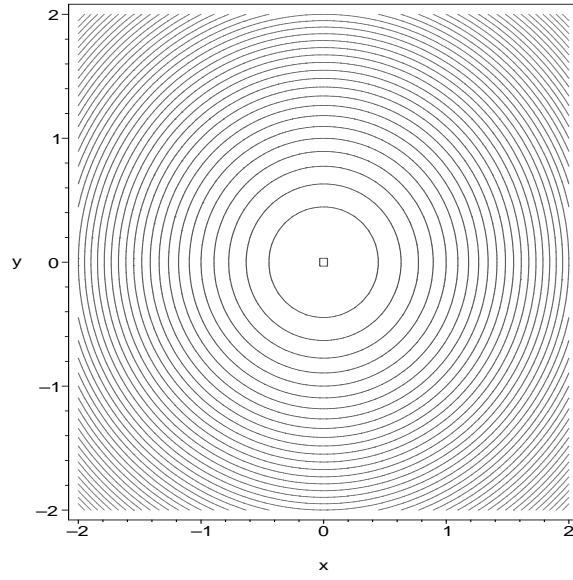


Figure 6: Courbes de niveau de f_1

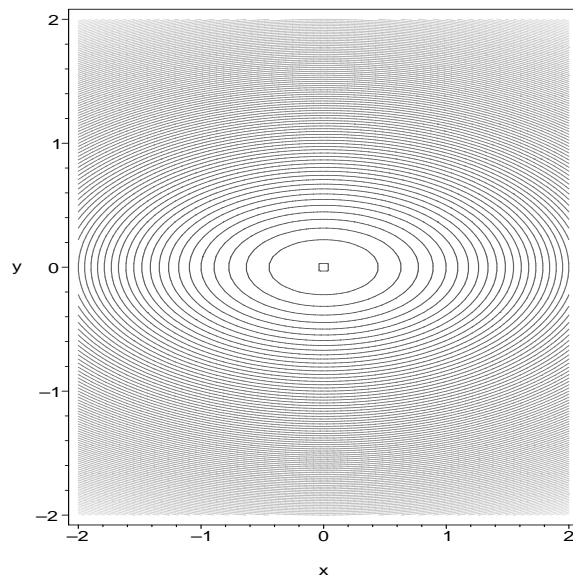


Figure 7: Courbes de niveau de f_4

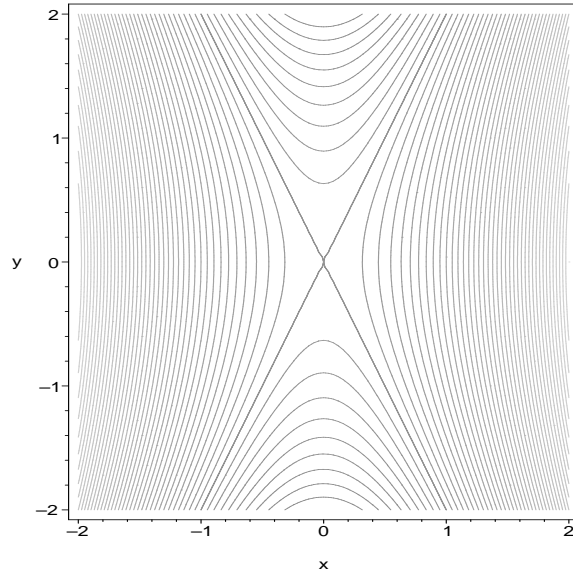


Figure 8: Courbes de niveau de $f_{-\frac{1}{4}}$

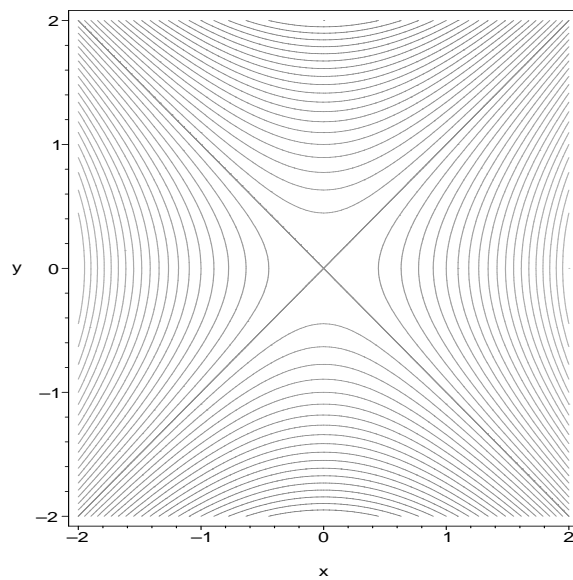


Figure 9: Courbes de niveau de f_{-1}

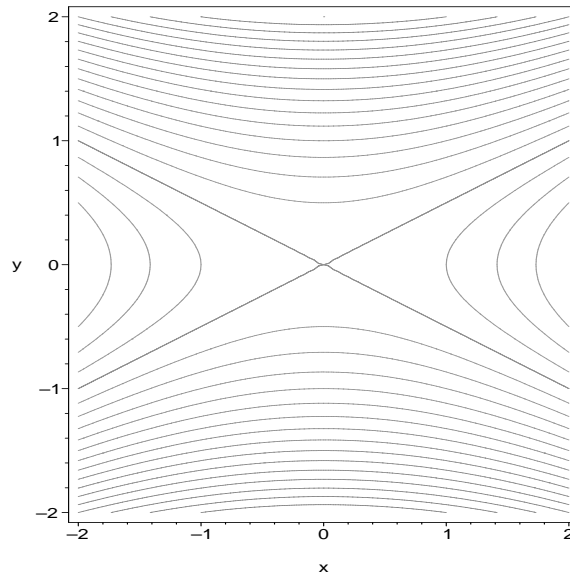


Figure 10: Courbes de niveau de f_{-4}

Exercice II

1. Considérons

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (1)$$

- Si $a \neq 0$

$$\begin{aligned} q(x, y) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2 \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2 \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} A &= a \\ \alpha &= \frac{b}{2a} \\ B &= c - \frac{b^2}{4a} \\ \beta &= 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Si $a = 0$ alors $q(x, y) = bxy + cy^2$. Comme a, b et c ne sont pas tous nuls, b ou c est non nul.
 - Si $c = 0$ alors $b \neq 0$ et on a

$$q(x, y) = bxy = -\frac{b}{4}(x - y)^2 + \frac{b}{4}(x + y)^2$$

posons

$$\begin{cases} A &= -\frac{b}{4} \\ \alpha &= -1 \\ B &= \frac{b}{4} \\ \beta &= 1 \end{cases} \quad (3)$$

– Si $b = 0$ alors $c \neq 0$ et on a

$$q(x, y) = cy^2$$

posons

$$\begin{cases} A = 0 \\ \alpha = 0 \\ B = c \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2. Dans (2), (3) et (4) on a $\alpha\beta \neq 1$. ainsi $\det P = 1 - \alpha\beta \neq 0$, par suite la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Notons (i, j) la base canonique. Considérons les vecteurs u et v définis par

$$\begin{aligned} u &= P^{-1}i = \frac{1}{1 - \alpha\beta}i + \frac{-\beta}{1 - \alpha\beta}j \\ v &= P^{-1}j = \frac{-\alpha}{1 - \alpha\beta}i + \frac{1}{1 - \alpha\beta}j \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} (x + \alpha y)u + (\beta x + y)v &= (x + \alpha y)P^{-1}i + (\beta x + y)P^{-1}j \\ &= P^{-1}((x + \alpha y)i + (\beta x + y)j) \\ &= P^{-1}(P(xi + yj)) \\ &= xi + yj \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} X = x + \alpha y \\ Y = \beta x + y \end{cases}$$

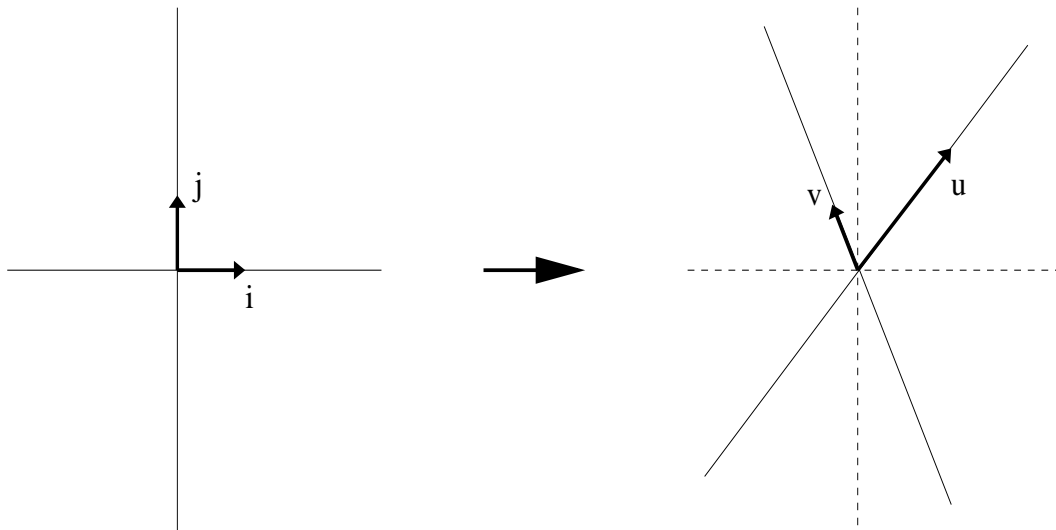
si bien que

$$xi + yj = Xu + Yv$$

Ainsi tout point $M \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont (x, y) dans le repère (O, i, j) a pour coordonnées (X, Y) dans le repère (O, u, v) .

Remarquons que l'on pouvait conclure plus rapidement au moyen du cours de CS 106 en remarquant que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



3. Considérons désormais l'application Q qui a un point $M \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont (x, y) dans le repère (O, i, j) et (X, Y) dans le repère (O, u, v) fait correspondre le réel $q(x, y)$ si bien que

$$Q(X, Y) = q(x, y) = AX^2 + BY^2 \quad (5)$$

Il vient

$$Q(X, Y) = A \left(X^2 + \frac{B}{A} Y^2 \right) = Af_{\frac{B}{A}}(X, Y)$$

où f est la fonction définie dans l'exercice I. Pour représenter les courbes de niveau de q dans (O, i, j) , il suffit donc de représenter les courbes de niveau de Q dans (O, u, v) . Comme $A > 0$ et $B > 0$ on a $t = \frac{B}{A} > 0$, on obtient, par exemple, la figure 11.

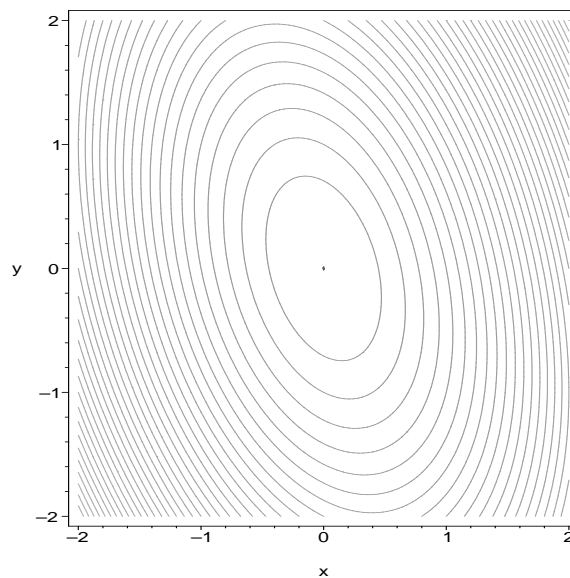


Figure 11: $A > 0$ et $B > 0$

4. De manière analogue à ce qui précède on a

$$Q(X, Y) = A \left(X^2 + \frac{B}{A} Y^2 \right) = Af_{\frac{B}{A}}(X, Y)$$

mais avec $A > 0$ et $B < 0$ si bien que $t = \frac{B}{A} < 0$. On obtient, par exemple, la figure 12.

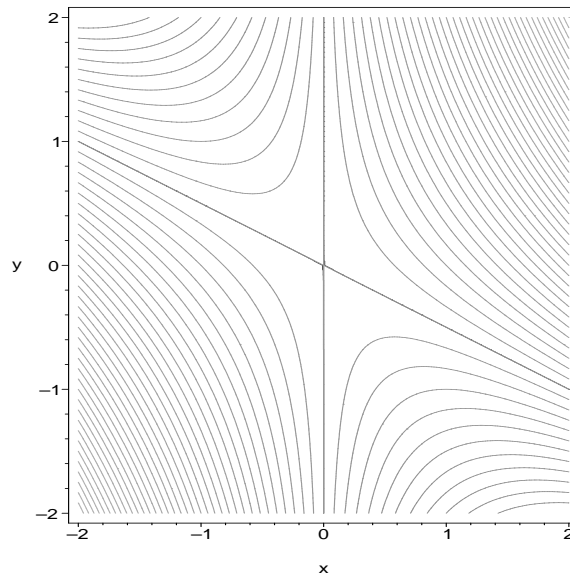


Figure 12: $A > 0$ et $B < 0$

5. De manière analogue à ce qui précède on a

$$Q(X, Y) = AX^2 = Af_0(X, Y)$$

On obtient, par exemple, la figure 13.

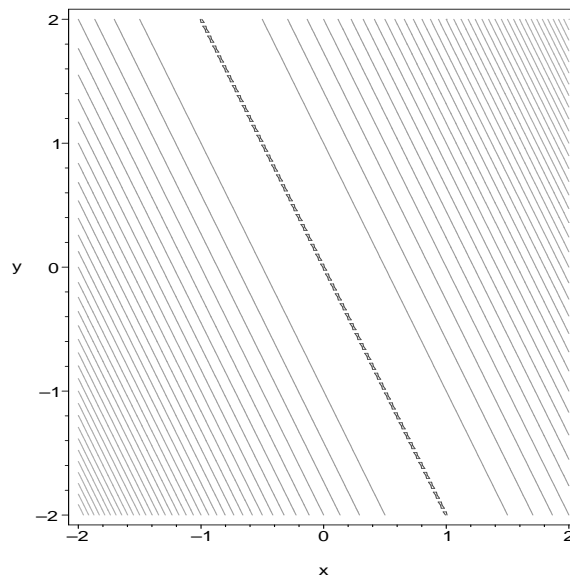


Figure 13: $A > 0$ et $B = 0$

6. De manière analogue à ce qui précède, on peut représenter l'allure des courbes de niveau de q dans tous les cas. Lorsque $A \neq 0$, il suffit de regarder le signe de $\frac{B}{A}$. Lorsque $A = 0$ la situation est analogue en considérant $f_0(Y, X)$. Les différentes situations sont résumées dans le tableau ci-après.

	$A < 0$	$A = 0$	$A > 0$
$B < 0$	Fig. 11	Fig. 13	Fig. 12
$B = 0$	Fig. 13	Impossible	Fig. 13
$B > 0$	Fig. 12	Fig. 13	Fig. 11

Il convient de remarquer que dans le cas $A > 0$ et $B > 0$ la figure 11 représente les courbes de niveau d'altitude positive alors qu'elle représente les courbes de niveau d'altitude négative dans le cas $A < 0$ et $B < 0$.

Exercice III

1. Considérons

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

alors

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix}$$

donc

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Si $b = 0$ et $a = c$ alors $M = aI$, cette matrice a la valeur propre double a et i et j comme vecteurs propres. Sinon, calculons le polynôme caractéristique de M , on a

$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda - \frac{b^2}{4} + ac$$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique soit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a - c)^2 + b^2} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(a + c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a - c)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres correspondant s'obtiennent en calculant le noyau de $M - \lambda_1 I$ et $M - \lambda_2 I$ soit

$$v_1 = \begin{pmatrix} a - c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a - c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \\ b \end{pmatrix}$$

3. Le produit scalaire $v_1 \cdot v_2$ est égal à

$$(a - c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2})(a - c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}) + b \times b$$

c'est-à-dire $(a - c)^2 - (a - c)^2 - b^2 + b^2$ soit 0.

4. Considérons la matrice B constituée des vecteurs colonnes v_1 et v_2 alors

$$B^{-1}MB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Notons D cette matrice diagonale. En outre

$${}^t B B = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Notons C cette matrice diagonale, il vient $C^{-1} {}^t B M B = I$ si bien que $B^{-1} = C^{-1} {}^t B$, ainsi

$$C^{-1} {}^t B M B = D$$

et finalement

$${}^t B M B = C D$$

D'autre part B est la matrice de changement de base de la base canonique à la base (v_1, v_2) , ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

par suite

$$\begin{aligned} q(x, y) &= {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \left(B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) M B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} {}^t B M B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} C D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \|v_1\|^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \|v_2\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \|v_1\|^2 X^2 + \lambda_2 \|v_2\|^2 Y^2 \end{aligned}$$

5. On a $\|v_1\|^2 > 0$ et $\|v_2\|^2 > 0$. De manière analogue à ce qui a été fait dans l'exercice III, les courbes de niveau se déduisent des courbes de niveau de la fonction f de l'exercice I dessinée dans le repère (O, v_1, v_2) . Elles sont résumées ci-après.

	$\lambda_1 < 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$	Fig. 11	Fig. 13	Fig. 12
$\lambda_2 = 0$	Fig. 13	Impossible	Fig. 13
$\lambda_2 > 0$	Fig. 12	Fig. 13	Fig. 11

Exercice IV

1. On a $q(0, 0) = 0$. La fonction q admet un minimum en 0 si et seulement si $q(x, y) \geq 0$ pour tous réels x et y , cela est équivalent à

$$AX^2 + BY^2 \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Au vu de la question 1 de l'exercice II, cela est équivalent à

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 4ac - b^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

2. De manière analogue, la fonction q admet un minimum en 0 si et seulement si $q(x, y) \geq 0$ pour tous réels x et y , cela est équivalent à

$$\lambda_1 \|v_1\|^2 X^2 + \lambda_2 \|v_2\|^2 Y^2 \geq 0$$

Comme $\|v_1\|^2 > 0$ et $\|v_2\|^2 > 0$, cela est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Au vu de la question 2 de l'exercice III, cela est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 0 \end{cases}$$

Comme $\lambda_1 \geq \lambda_2$, cela équivaut à

$$\frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 0$$

c'est-à-dire

$$a+c \geq \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} a+c \geq 0 \\ (a+c)^2 \geq (a-c)^2 + b^2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a+c \geq 0 \\ 4ac - b^2 \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

3. Il s'agit de démontrer que (6) et (7) sont équivalentes. Commençons par remarquer que $4ac - b^2 \geq 0$ entraîne $4ac \geq 0$ donc $4ac + a^2 \geq 0$ donc $4(a+c)a \geq 0$. Ainsi

$$4ac - b^2 \geq 0 \implies a \text{ et } a+c \text{ sont de même signe}$$

• Supposons (6).

– Si $a = b = 0$ et $c \geq 0$ alors (7) est vraie.

– Sinon, la remarque entraîne

$$\begin{cases} a+c \geq 0 \\ 4ac - b^2 \geq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (7).

• Réciproquement, supposons (7).

– Si $a = 0$ alors $-b^2 \geq 0$ entraîne $b = 0$ et $a+c \geq 0$ entraîne $c \geq 0$ donc (6) est vraie.

– Si $a \neq 0$ alors $4ac \geq b^2 \geq 0$ donc a et c sont de même signe. Comme $a+c \geq 0$ on a $a > 0$. En particulier $a \geq 0$ et $4ac - b^2 \geq 0$ donc (6) est vraie.

Ainsi (6) et (7) sont équivalentes.