

## Corrigé de la feuille d'exercices 2

*Exercices non corrigés en TD*

### Exercice IV

Le point  $(1/2, 1/2, 1/2)$  est un minimum et le point  $(-1, -1, 2)$  est un maximum. Pour le démontrer, on choisit la fonction objectif  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  (on fait un raisonnement analogue aux exercices I et V) et les contraintes  $h_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2 = 0$ ,  $h_2(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$ . Il faut donc minimiser/maximiser  $f(x, y, z)$  sous les contraintes  $h_1(x, y, z) = 0$  et  $h_2(x, y, z) = 0$ . On calcule alors  $\nabla h_1(x, y, z) = (1, 1, 2)$  et  $\nabla h_2(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$ . On en déduit que les vecteurs  $\nabla h_1(x, y, z)$  et  $\nabla h_2(x, y, z)$  sont linéairement indépendant pour tous points  $(x, y, z)$  satisfaisant ces contraintes. On calcule  $\nabla f(x, y, z) + \lambda_1 \nabla h_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h_2(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , on a alors :

- soit  $\lambda_2 = 1$ , alors  $\lambda_1 = 0$ , d'où  $z = -1/2$ , contradiction avec  $z = x^2 + y^2 \geq 0$ .
- soit  $x = y$ , c'est-à-dire  $x + z = 1$  et  $z = 2x^2$ . Toutes solutions du système sont

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ \lambda_1 = -10/3 \\ \lambda_2 = 8/3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \\ \lambda_1 = -2/3 \\ \lambda_2 = 1/3 \end{cases}$$

On calcule  $L_{XX}$ . Pour le point  $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$ , on montre que c'est un minimum. En fait, en utilisant la valeur de  $\lambda_2$ , on déduit que  $L_{XX}$  est définie positive, ce qui assure que ce point est un minimum. Pour le point  $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ , on peut montrer que c'est un maximum.

### Exercice V

1. Soit  $g(x) = 4x^3 + x - 1$ , la fonction est polynomiale donc dérivable et  $g'(x) = 12x^2 + 1 > 0$  ainsi  $g$  est strictement croissante. En outre  $\lim_{-\infty} g = -\infty$ ,  $\lim_{+\infty} g = +\infty$  et  $g$  est continue. Ainsi  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , elle a donc une seule racine. Comme  $g(\frac{1}{2}) = 0$  on a  $\frac{1}{2}$  comme unique racine de  $g$ .

2. Soit  $(x, y, z)$  un point du paraboloïde. La distance de ce point à  $(1, 1, 0)$  est

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

or  $z = x^2 + y^2$  ainsi cette distance se ré-écrit  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2)^2}$ . Il s'agit de trouver  $(x, y)$  qui minimise cette fonction. Comme  $t \mapsto t^2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et que la distance est positive, il convient de minimiser la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2)^2$ . On a

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x - 1 + 2x(x^2 + y^2) \\ y - 1 + 2y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ainsi  $(x, y)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\begin{cases} x - 1 + 2x(x^2 + y^2) = 0 \\ (x - y) + 2(x^2 + y^2)(x - y) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (x-y)(1+2x^2+2y^2) = 0 \\ x-1+2x(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = y \\ 4x^3 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

en vertu de la question 1, ce système équivaut à  $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Par ailleurs,

$$\text{H}f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 1+6x^2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 1+6y^2+2x^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{H}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

le déterminant de cette matrice est  $32 > 0$  et la trace est  $12 > 0$  donc la matrice a deux valeurs propres strictement positives, par suite  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est un minimum de  $f$ .

## Exercice IX

Considérons la fonction  $L$  définie sur  $\mathbb{R}^5$  par

$$L(x, y, z, \lambda, \alpha) = x^2 + 5xy - \frac{5}{96}z^3 - \lambda(x + y + z - 5 + \alpha^2)$$

Le point  $(x, y, z, \lambda, \alpha)$  est critique si et seulement si  $\nabla L(x, y, z, \lambda, \alpha) = 0$  ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 2x + 5y - \lambda = 0 \\ 5x - \lambda = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 - \lambda = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \\ \alpha\lambda = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{1}{32}z^2 + \frac{1}{80}z^2 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 5x = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ (z-10)^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{3}{160}z^2 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{125}{8} \\ (x, y, z) = (-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Il y a donc deux points candidats à être minimum sous la contrainte indiquée :  $(-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10)$  et  $(0, 0, 0)$ .