Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — F 03 – Semestre 1

Interrogation du 22/04/2003

corrigé

Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|1 + n\sin n| \leq |1| + |n \sin n| \leq 1 + n|\sin n| \leq 1 + n$ ainsi

$$0 \leq \left|\frac{1 + n\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{1+n}{n^3} \tag{2}$$

d'autre part

$$\lim \frac{\frac{1+n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

ainsi

$$\frac{1+n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

Ces suites sont à termes positifs et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc (3) entraine la convergence de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1+n}{n^3}$$

Par suite (2) entraine l'absolue convergence et donc la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1+n\sin n}{n^3}$.

Exercice II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ donc

$$0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

Soit a non nul alors $a \notin]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ lorsque $n > \frac{1}{|a|}$ donc

$$a \notin \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

par suite

$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

cet ensemble n'est pas ouvert puisqu'il contient 0 mais n'est pas voisinage de 0 car $\forall \varepsilon > 0,\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset \{0\}$.

Exercice III

1. Soit P_n l'hypothèse de récurrence $u_n \leq 4^n u_0$.

- P_0 est vraie puisque $u_0 \leq u_0$.
- Supposons P_n vraie alors $u_n \leq 4^n u_0$ donc $4u_n \leq 4^{n+1}u_0$. Comme $-u_n^2 \leq 0$ on obtient $4u_n - u_n^2 \leq 4^{n+1}u_0$ par suite $u_{n+1} \leq 4^{n+1}u_0$ donc P_{n+1} est vérifiée.

2. On a $\lim 4^n = +\infty$. Si $u_0 < 0$ alors $\lim 4^n u_0 = -\infty$ par suite $\lim u_n = -\infty$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = u_n(3 - u_n)$. Les termes de la suite sont négatifs donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ainsi la suite est décroissante.

4. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0

5. Il s'agissait de la question difficile de cette interrogation. Supposons $u_0 < -1$ alors posons $v_n = -\frac{u_n}{5^n}$, comme $u_n \leq 0$, la suite (v_n) est à termes positifs donc nous pouvons appliquer le critère de d'Alembert. On a

$$v_{n+1} = -\frac{u_{n+1}}{5^{n+1}}$$

or $u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$ donc

$$v_{n+1} = \frac{4}{5}\frac{-u_n}{5^n} + 5^{n-1}\left(\frac{-u_n}{5^n}\right)^2$$

donc $v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n + 5^{n-1}v_n^2$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{5} + 5^{n-1}v_n$. Or (v_n) est croissante donc minorée par son premier terme v_0, en outre $\lim 5^{n-1} = +\infty$ ainsi

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = +\infty$$

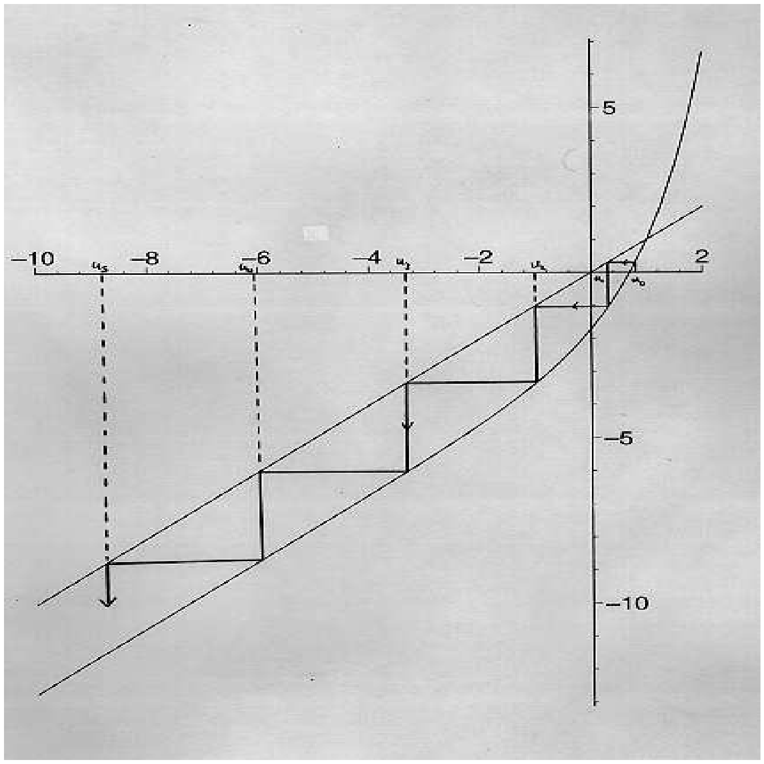
donc $\sum_{n\geq 0} -\frac{u_n}{5^n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{5^n}$ diverge. Si $u_0 \in]-1, 0[$ alors la question 1 entraine l'existence d'un rang N tel que $u_N < -1$, le raisonnement est alors analogue.

Exercice IV

1. Le réel x est équilibre de (1) si et seulement si $x = e^x + x - e$, c'est-à-dire si et seulement $e^x = e$ c'est-à-dire si et seulement $x = 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - e$ alors f est dérivable et $f'(x) = e^x + 1$. Ainsi $|f'(1)| = 1 + e > 1$ donc 1 est un équilibre instable.

3.



5
−5
−10
−10
−8
−6
−4
−2
2
u_5
u_4
u_3
u_2
u_1
u_0