Interrogation du 22/04/2003

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice I (5 points)

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1+n\sin n}{n^3}$?

Exercice II (4 points)

L'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est-il ouvert ?

Exercice III (6 points)

Soit $u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$ et $u_0 \in]-\infty, 0[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 4^n u_0$.

2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{5^n}$?

Exercice IV (5 points)

Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = e^{u_n} + u_n - e \tag{1}$$

où $e \simeq 2.718...$ désigne la base du logarithme naturel.

1. Déterminer le ou les équilibres de (1).

2. Indiquer la nature du ou des équilibres trouvé(s) à la question précédente

3. Sur le papier milimétré joint, trouver graphiquement les 6 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{4}{5}$. On pourra utiliser $e^{-2} \simeq 0.1$ et $e^{-1} \simeq 0.4$.