Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I | F 03 – Semestre 1

Interrogation du 13/3/2003

corrigé

Exercice I

1. On a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}{(n^2+2)-(n^2+1)} = \sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}$$

or $\lim \sqrt{n^2+2} = +\infty$ et $\lim \sqrt{n^2+1} = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$.

2. On a

$$u_n = n\cos\left(\frac{1}{n}\right) - n = \frac{\cos\frac{1}{n} - \cos 0}{\frac{1}{n} - 0}$$

or $\lim \frac{1}{n} = 0$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0$$

donc $\lim u_n = 0$.

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme (u_n) converge vers l, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}$.
- Comme (v_n) converge vers l', il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et $n > N$ alors

$$|w_n - (l + 2l')| = |(u_n - l) + 2(v_n - l')| \leq |u_n - l| + 2|v_n - l'| = \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |w_n - (l+2l')| < \varepsilon$ ainsi $\lim w_n = l + 2l'$.

Exercice III

Soit α un réel et $v_n = u_n + \alpha$ alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = au_n + b + \alpha = a(v_n - \alpha) + b + \alpha = av_n + \alpha(1-a) + b$$

posons alors $\alpha = \frac{b}{a-1}$, il vient que (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme v_0 ainsi $v_n = v_0 a^n$ donc

$$u_n + \alpha = (u_0 + \alpha)a^n$$

donc

$$a_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

Exercice IV

La suite (u_n) converge, donc elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon = \frac{1}{5}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour p et q des entiers avec $q \geq p \geq N$ on a $|u_q - u_p| < \varepsilon$. En particulier pour $p = N$ il vient

$$u_q \in \left] u_N - \frac{1}{5}, u_N + \frac{1}{5} \right[$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \frac{1}{n_0}$ et alors

$$u_q \in \left] \frac{1}{n_0} - \frac{1}{5}, \frac{1}{n_0} + \frac{1}{5} \right[\cap A_5$$

or si $(n_1, n_2) \in [\![1, 4]\!]^2 \Rightarrow |\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}| < \frac{1}{5}$ entraine $n_1 = n_2$. Ainsi $u_q = \frac{1}{n_0}$. On a démontré que pour tout $q \geq N$ on a $u_q = \frac{1}{n_0}$ donc (u_n) est constante à partir du terme d'indice N.

Ce résulat se généralise à un $s \in \mathbb{N}^*$ quelconque. En remplacant 4 par s et $\frac{1}{5}$ par $\frac{1}{s+1}$ dans la démonstration précédente.