Examen du 24/6/2002

Corrigé

Exercice I

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = \mathrm{E}((\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}})$ alors

$$\begin{array}{lll}
n > N \;\Rightarrow\; n \geq (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}} & & \text{donc} \\
n > N \;\Rightarrow\; n^\alpha \geq \frac{1}{\varepsilon} & & \text{donc} \\
n > N \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^\alpha} \leq \varepsilon & & \text{or } n^\alpha > 0 \text{ donc} \\
n > N \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n^\alpha}\right| \leq \varepsilon & & \text{donc} \\
n > N \;\Rightarrow\; \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| \leq \varepsilon & & \text{donc} \\
n > N \;\Rightarrow\; |u_n - 0| \leq \varepsilon & &
\end{array}$$

Ainsi $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon$ donc $\lim u_n = 0$.

2. L'ensemble E n'est pas un fermé puisque (u_n) est une suite d'éléments de E qui tend vers $0 \notin E$. Il ne peut donc pas être compact. En outre E n'est pas ouvert puisque E est au plus dénombrable, il ne peut contenir un intervalle ouvert.

3. Soit $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ alors $u_n = a_n b_n$ et

i) La suite (b_n) est décroissante

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geq 0$

iii) On a $\lim b_n = 0$

iv) Soit p et q deux entiers non nuls avec $q > p$ alors

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \in \{-1, 0, 1\}$$

donc $|\sum_{n=p}^{q} a_n| \leq 1$.

Le théorème d'Abel s'applique et donne la converge de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolulement convergente si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ce qui est le cas si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice II

1. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ est une reunion d'intervalles ouverts, c'est donc un ouvert. D'autre part $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de 0 (par exemple). Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas un fermé. Par suite ce n'est pas non plus un compact.

2. L'adhérence de A est $\overline{A} = \mathbb{R}$, en effet tous les éléments de A sont dans l'adhérence. Tous les autres sont des entiers $p \in \mathbb{Z}$. La suite $u_n = p + \frac{1}{n+1}$ est alors une suite d'éléments de A qui converge vers p. Ainsi $p \in \overline{A}$.

Comme A est ouvert, on a $\mathring{A} = A$.

On a $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap(A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ donc $A' = \mathbb{R}$.

On a $A' \cap A^* = \emptyset$ donc $A^* = \emptyset$.

Exercice III

1. OUI. Démonstration : soit $x \in A'$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap(A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

or $A \subset B$ donc $A \setminus \{x\} \subset B \setminus \{x\}$ ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap(B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

donc $x \in B'$. Par suite $A' \subset B'$.

2. NON. Contre-exemple : $A = [1,2] \cup \{5\}$ et $B = [1,3]$ alors

$$A' = [1,2] \subset [1,3] = B'$$

pourtant $A \not\subset B$.

3. NON. Contre-exemple : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors

$$\overline{A} = \mathbb{R} = \overline{B} \text{ et } \mathring{A} = \emptyset = \mathring{B}$$

pourtant $A \neq B$.

Exercice IV

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} A_n &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \subset A\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x - \frac{1}{n} \text{ et } x + \frac{1}{n} < 4\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{n} \leq x \text{ et } x < 4 - \frac{1}{n}\right\} \\ &= \left[1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}\right[\end{aligned}$$

Ainsi $A_1 = [2,3[$, $A_2 = [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[$ et $A_3 = [\frac{4}{3}, \frac{11}{3}[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in A_n$ et soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$ donc A est voisinage de x, ce qui implique $x \in \mathring{A}$.

3. Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_{n_0}$. La question précédente donne alors $x \in \mathring{A}$. Cela prouve que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset \mathring{A}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathring{A}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$, soit alors n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, par exemple $n = \mathrm{E}(\frac{1}{n_0}) + 1$ alors

$$\left]x - \frac{1}{n_0}, x + \frac{1}{n_0}\right[\subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$$

donc $x \in A_{n_0}$ et par suite $\mathring{A} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

4. Considérons $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \overline{A_n}$ alors il existe une suite convergente (y_p) d'éléments de A_n qui converge vers x. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ p > P \Rightarrow |y_p - x| < \varepsilon$$

donc pour $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, il existe un rang P à partir duquel $y_p - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < x < y_p + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, il en résulte

$$y_p - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{n+1} < x < x + \frac{1}{n+1} < y_p + \frac{1}{n}$$

comme $[y_p - \frac{1}{n}, y_p + \frac{1}{n}] \subset A$ on en déduit $]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[\subset A$, donc $x \in A_{n+1}$.

5. Montrons que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n} \subset \mathring{A}$. Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$ alors il alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \overline{A_{n_0}}$ donc $x \in A_{n_0+1}$ donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, la question 3 donne alors $x \in \mathring{A}$.

Réciproquement, montrons que $\mathring{A} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$. Soit $x \in \mathring{A}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_{n_0}$ mais on a $A_{n_0} \subset \overline{A_{n_0}}$ donc $x \in \overline{A_{n_0}}$ donc $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$.

6. Soit A un ouvert, alors $A = \mathring{A}$ donc $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$. Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable et que $\overline{A_n}$ est un fermé, on en déduit que A est réunion dénombrable de fermés.