Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — F 03 – Semestre 1

Examen du 23/6/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

Soit $\alpha > 0$ un réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim u_n = 0$.

2. L'ensemble E est-il fermé ? Ouvert ? Compact ?

3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$?

4. Cette série est-elle absolument convergente ? Discuter selon α le cas echéant.

Exercice II (4 points)

Soit $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?

2. Déterminer $\overline{A}$, $\mathring{A}$, ∂A, A' et A^*.

Exercice III (4 points)

Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Pour chacune des questions suivantes, faites une démonstration ou donnez un contre-exemple.

1. Si $A \subset B$, a-t-on $A' \subset B'$?

2. Si $A' \subset B'$, a-t-on $A \subset B$?

3. Si $\mathring{A} = \mathring{B}$ et $\overline{A} = \overline{B}$ a-t-on $A = B$?

Exercice IV (6 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Pour tout entier n non nul on note

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \subset A \right\}$$

1. Dans cette question $A = [1, 4[$, calculer A_1, A_2 et A_3.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset \mathring{A}$.

3. Montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathring{A}$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{A_n} \subset A_{n+1}$

5. Montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} = \mathring{A}$

6. En déduire que tout ensemble ouvert est la réunion dénombrable d'ensembles fermés.