Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
F 03 – Semestre 1

# Devoir 3

*correction*

## Exercice I

**1.** Soit $U$ et $V$ deux ouverts non vides tels que $\mathbb{R} \subset U \cup V$ alors $U \cup V = \mathbb{R}$ donc

$$U \cup V \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$$

**2.** Il n'existe pas d'ouverts $U$ et $V$ tels que $U \cap \emptyset \neq \emptyset$ et $V \cap \emptyset \neq \emptyset$. Or la proposition $\forall X \in \emptyset,\ P(X)$ est vraie (*c.f.* CS 102) donc $\emptyset$ est connexe.

**3.** Considérons $A = \{-1, 1\}$. Soit $U = ]-2, 0[$ et $V = ]0, 2[$, ces ensembles sont non vides et vérifient

*i)* $A \subset U \cup V$

*ii)* $U \cap A \neq \emptyset$

*iii)* $V \cap A \neq \emptyset$

pourtant $U \cap V \cap A = \emptyset$. Donc $A$ n'est pas connexe.

**4.** Soit $A = \{a\}$. Tous les ouverts $U$ et $V$ tels que

$$A \subset U \cup V \text{ et } U \cap A \neq \emptyset \text{ et } V \cap A \neq \emptyset$$

vérifient $a \in U$ et $a \in V$ donc $U \cap V \cap A \neq \emptyset$ donc $A$ est connexe.

## Exercice II

**1.** Soit $A$ un ensemble connexe et $a$ et $b$ deux éléments de $A$ tels que $a < b$. Supposons que $x$ soit un élément de $A$ tel que $a < x < b$ et considérons $U = ]-\infty, x[$ et $V = ]x, +\infty[$. Comme $U \cap V \cap A = \emptyset$ on a $A \not\subset U \cap V$ ou $U \cap A = \emptyset$ ou $V \cap A = \emptyset$. Les deux dernieres assertions étant impossible, on a $A \not\subset U \cap V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ donc $x \in A$.

**2.** Le cas de l'intervalle $A = \emptyset$ a été traité dans l'exercice précédent, soit donc $A$ un ensemble connexe non vide et $x \in A$. Notons $A_x^+ = A \cap [x, +\infty[$ et $A_x^- = A \cap ]-\infty, x]$.

Si $A_x^+$ n'est pas majoré par $M$ pour tout $M \geq x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in A_x^+$ tel que $y \in A$. En vertu de la question précédente $[x, y] \subset A_x^+$, ainsi $[x, +\infty[ \subset A_x^+$ donc $A_x^+ = [x, +\infty[$.

Si $A_x^+$ est majoré, soit $M$ sa borne supérieure. Alors $A_x^+ \subset [x, M]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z \in A_x^+$ tel que $z \geq M - \frac{1}{n}$. En vertu de la question précédente, $[x, z] \subset A_x^+$. Ainsi $[x, M[ \subset A_x^+$. Donc $A_x^+ = [x, M[$ ou $A_x^+ = [x, M]$.

On a montré que $A_x^+$ est l'un des trois intervalles suivants : $[x, +\infty[$, $[x, M[$ ou $[x, M]$. De manière analogue $A_x^-$ est l'un des trois intervalles suivants : $]-\infty, x[$, $]m, x[$ ou $A_x^+ = [m, x]$. Donc $A = A_x^- \cup A_x^+$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

## Exercice III

**1.** Les ensembles $X = U \cap A$ et $Y = V \cap A$ sont non vides, par hypothèses. Remarquons que

$$X \cup Y = (U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A = A$$

Soit $(u_n)$ une suite convergente d'éléments de $X$, notons $l$ sa limite. Comme $X \subset A$, la suite $(u_n)$ est également une suite d'éléments de $A$ et comme $A$ est fermé on a $l \in A$. Donc $l \in X$ ou $l \in Y$.

Supposons $l \in Y$ alors $l \in V$. Comme $V$ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset V$. Mais comme $\lim u_n = l$, il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n \in ]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ donc $u_N \in Y$ donc $X \cap Y \neq \emptyset$. Contradiction.

En conséquence, $l \in X$. Nous avons montré que toute suite convergente d'élements de $X$ converge vers $X$. Donc $X$ est un fermé. De manière analogue on prouve que $Y$ est un fermé.

**2.** Soit $A = [a, b]$. Soit $U$ et $V$ deux ouverts non vides. Notons $X = U \cap A$ et $Y = V \cap A$ et supposons

*i)* $A \subset U \cap V$

*ii)* $X \neq \emptyset$

*iii)* $Y \neq \emptyset$

Montrons par l'absurde que $X \cap Y \neq \emptyset$. Supposons que $X \cap Y = \emptyset$. Soit $M = \sup X$, comme $X$ est un fermé on a $M \in X$. Si $M < b$, comme $U$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]M-\varepsilon, M+\varepsilon[\subset U$ et $M + \varepsilon < b$. Mais alors $M + \varepsilon \in A$ ce qui est absurde. Ainsi $M \geq b$ donc $M = b$ donc $b = \sup X$. De manière analogue $b = \sup Y$. Donc $b \in X \cap Y$ donc $X \cap Y \neq \emptyset$ ce qui est absurde.

Conclusion : $X \cap Y \neq \emptyset$ donc $U \cap V \cap A \neq \emptyset$ donc $A$ est connexe.

**3.** Soit $U$ et $V$ deux ouverts tels que $A \subset U \cap V$ et $A \cap U \cap V = \emptyset$. Comme $A_i \subset A$ on a $A_i \subset U \cap V$ et $A_i \cap U \cap V = \emptyset$. La connexité de $A_i$ entraine $U \cap A_i = \emptyset$ ou $V \cap A_i = \emptyset$. Par suite $U \cap A = \emptyset$ ou $U \cap B = \emptyset$. Donc $A$ est connexe.

**4.** Le cas des intervalles $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et des singletons a déjà été traité dans l'exercice I. Le cas des intervalles $[a, b]$ avec $a < b$ a été traité à la question 2 de cet exercice.

**Les intervalles $]a, b[$ avec $a < b$ :** On a

$$]a, b[= \cup_{i \in \mathbb{N}^*} [a - \frac{1}{i}, b + \frac{1}{i}]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $]a, b[$ est connexe. Il est à noter que l'intervalle $[a - \frac{1}{i}, b + \frac{1}{i}]$ est vide lorsque $i < \frac{1}{b-a}$.

**Les intervalles $[a, b[$ avec $a < b$ :** On a

$$[a, b[= \cup_{i \in \mathbb{N}^*} [a, b + \frac{1}{i}]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $[a, b[$ est connexe.

**Les intervalles $]a, b]$ avec $a < b$ :** On a

$$[a, b[= \cup_{i \in \mathbb{N}^*} [a - \frac{1}{i}, b]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $]a, b]$ est connexe.

**Les intervalles** $]-\infty, b[$ **:** On a

$$]-\infty, b[=\cup_{i\in\mathbb{N}^*}[b-i, b-\frac{1}{i}]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $]-\infty, b[$ est connexe.

**Les intervalles** $]a, +\infty[$ **:** On a

$$]a, +\infty[=\cup_{i\in\mathbb{N}^*}[a+\frac{1}{i}, a+i]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $]a, +\infty[$ est connexe.

**Les intervalles** $]-\infty, b]$ **:** On a

$$]-\infty, b]=\cup_{i\in\mathbb{N}^*}[b-i, b]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $]-\infty, b]$ est connexe.

**Les intervalles** $[a, +\infty[$ **:** On a

$$[a, +\infty[=\cup_{i\in\mathbb{N}^*}[a, a+i]$$

Il s'agit de la réunion d'une famille croissante de connexes. Donc $[a, +\infty[$ est connexe.

Ainsi, tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble connexe de $\mathbb{R}$.