Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I | F 03 – Semestre 1

Devoir 3

A rendre le 19/05/03

L'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit *connexe* si et seulement si pour tous ouverts U et V sous-ensembles de $\mathbb{R}$ on a

$$A \subset U \cup V \text{ et } U \cap A \neq \emptyset \text{ et } V \cap A \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \cap A \neq \emptyset$$

Le but de ce devoir est de démontrer que les ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice I

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est connexe

2. Montrer que $\emptyset$ est connexe

3. Donner un exemple d'ensemble qui n'est pas connexe.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Le singleton $\{a\}$ est-il connexe ?

Exercice II

1. Soit A un ensemble connexe et $a < b$ deux éléments de A. Montrer que $[a, b] \subset A$.

2. Montrer que tout ensemble connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle

Exercice III

1. Soit A un fermé et U et V deux ouverts non vides. Notons $X = U \cap A$ et $Y = V \cap A$ et supposons

i) $A \subset U \cup V$

ii) $X \neq \emptyset$

iii) $Y \neq \emptyset$

iv) $X \cap Y = \emptyset$

Montrer que X et Y sont des fermés.

2. Soit a et b deux réels avec $a < b$. Montrer que $[a, b]$ est connexe.

3. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'ensembles connexes, croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$. Montrer que $A = \cup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$ est un ensemble connexe.

4. Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.