Devoir 2

correction

Exercice I

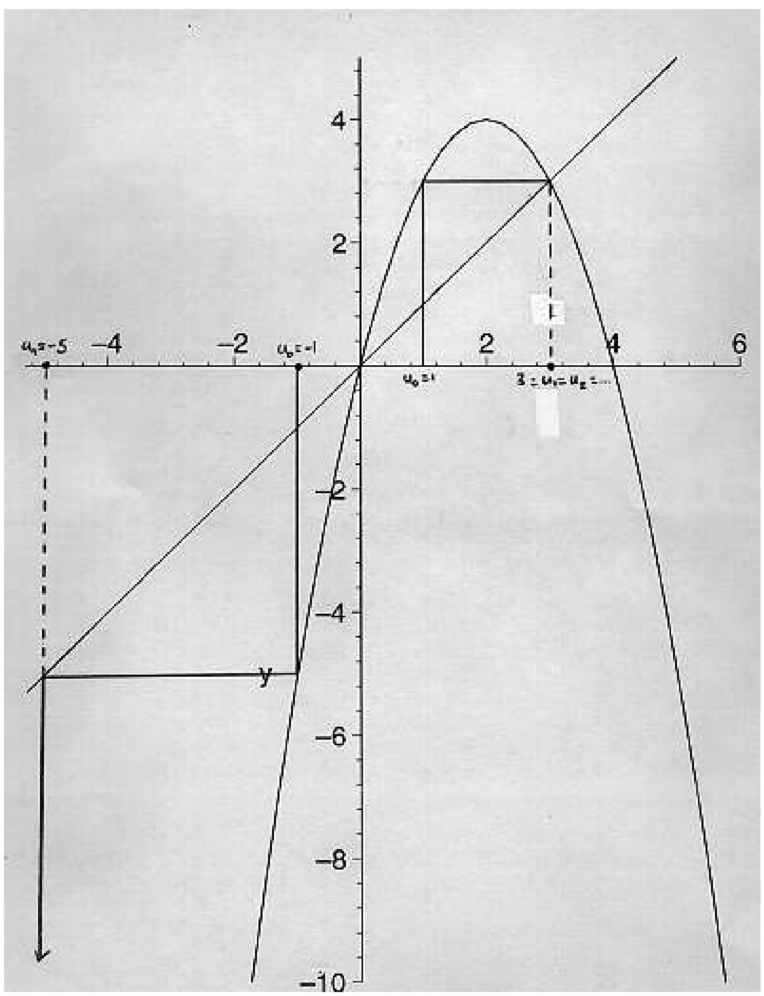
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - x^2$.

1. Le réel a est un équilibre de (1) si et seulement si $f(e) = e$ si et seulement si $e^2 - 3e = 0$ si et seulement si $e = 0$ ou $e = 3$.

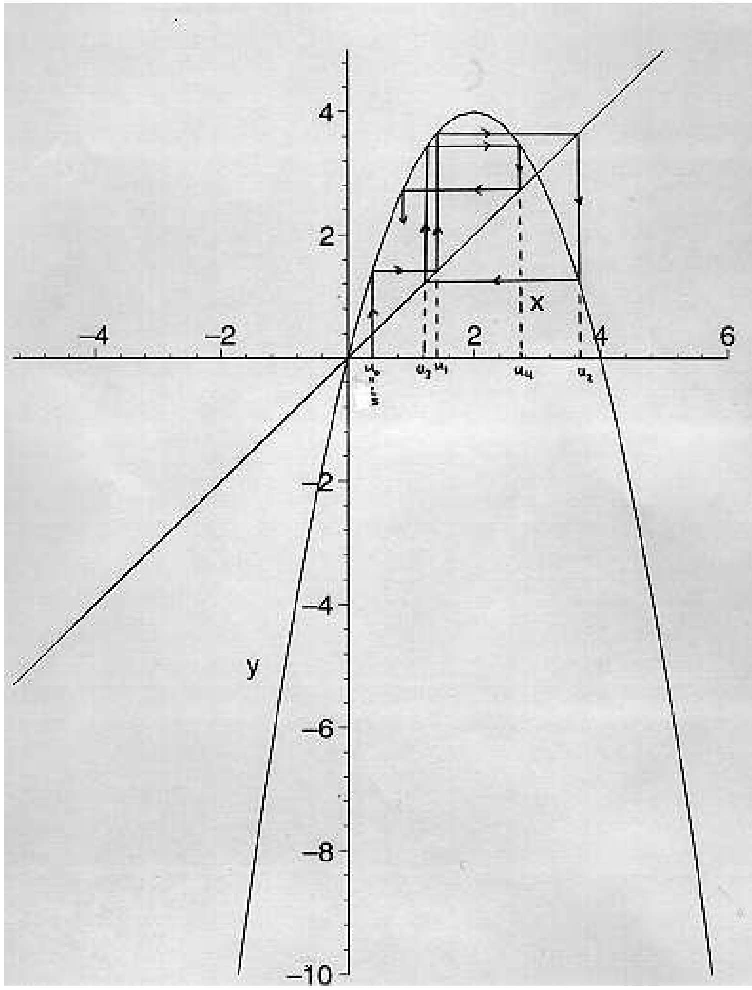
2. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 4 - 2x$.

- $|f(0)| = 4 > 1$ donc 0 est un équilibre instable
- $|f(3)| = |-2| > 1$ donc 3 est un équilibre instable

3. Les suites issues des conditions initiales $u_0 = -1$ et $u_0 = 1$ sont présentées ci-dessous. Remarquons que la suite est constante à partir du second terme dans ce cas.



La suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ est présentée ci-dessous.



Exercice II

1. Soit P_n l'hypothèse de récurrence $u_n \leq 4^n u_0$.

- P_0 est vraie puisque $u_0 \leq u_0$.
- Supposons P_n vraie alors $u_n \leq 4^n u_0$ donc $4u_n \leq 4^{n+1}u_0$. Comme $-u_n^2 \leq 0$ on obtient $4u_n - u_n^2 \leq 4^{n+1}u_0$ par suite $u_{n+1} \leq 4^{n+1}u_0$ donc P_{n+1} est vérifié.

2. On a $\lim 4^n = +\infty$. Si $u_0 < 0$ alors $\lim 4^n u_0 = -\infty$ par suite $\lim u_n = -\infty$. De plus
Les racines de $4x - x^2$ sont 0 et 4, donc si $u_0 > 4$ alors $u_1 < 0$. De manière analogue à la question précédente on montre alors que $u_n \leq 4^{n-1}u_1$ et on conclu que $\lim u_n = -\infty$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = u_n(3 - u_n)$. A partir de $n = 1$ les termes de la suite sont négatifs donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ainsi la suite est décroissante.

Exercice III

1. Soit P_n la proposition $u_n = 4\sin^2(2^n\alpha)$.

- P_0 est vraie puisque $u_0 = 4\sin^2\alpha$.
- Supposons P_n vrai alors $u_n = 4\sin^2(2^n\alpha)$ ce qui implique les 5 lignes suivantes

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 16\sin^2(2^n\alpha) - 16\sin^4(2^n\alpha) \\ u_{n+1} & = & 16\sin^2(2^n\alpha)(1-\sin^2(2^n\alpha)) \\ u_{n+1} & = & 4^2\sin^2(2^n\alpha)(1-\sin^2(2^n\alpha)) \\ u_{n+1} & = & 4^2\sin^2(2^n\alpha)\cos^2(2^n\alpha) \\ u_{n+1} & = & 4\sin^2(\times 2^{n+1}\alpha) \end{array}$$

  en utilisant que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$. Par suite P_{n+1} est vérifié.

2. Comme 0 esr un équilibre instable, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = 0$, ce qui équivaut à $4\sin^2(2^N\alpha) = 0$, ce qui équivaut à $\sin(2^N\alpha) = 0$, ce qui équivaut à $\exists k \in \mathbb{Z}$, $2^N\alpha = k\pi$, ce qui équivaut à $\alpha = \frac{k\pi}{2^N}$.

3. Comme 3 esr un équilibre instable, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = 3$, ce qui équivaut à $4\sin^2(2^N\alpha) = 3$, ce qui équivaut à $\sin(2^N\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui équivaut à $\exists\kappa \in \mathbb{Z}$, $2^N\alpha = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$ ou $2^N\alpha = \pi\frac{2\pi}{3} + \kappa\pi$ ce qui équivaut à $2^N\alpha = \frac{k}{3}\pi$ avec k non divisible par 3 puisque $\kappa = \frac{k}{3}$ ou $\kappa = \frac{2k}{3}$. Cela équivaut à $\alpha = \frac{k\pi}{3\times 2^N}$ avec k entier et non divisible par 3.