Devoir 2

A rendre le 2/04/03

Considérons, pour tout $n \geq 0$ entier, la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 4u_n - u_n^2 \tag{1}$$

Exercice I

1. Determiner les équilibres de (1).

2. Déterminer la nature de chaque équilibre trouvé

3. Determiner graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de la condition initiale $u_0 = -1$, puis de $u_0 = 1$ et de $u_0 = \frac{1}{5}$.

Exercice II

On suppose dans cet exercice que $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

1. Montrer que si $u_0 < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 4^n u_0$.

2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de son deuxième terme.

Exercice III

On suppose dans cet exercice que $u_0 \in [0; 4]$

1. Soit $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{u_0}{4}}$ c'est-à-dire $\alpha \in [-1; 1]$ tel que $u_0 = 4\sin^2\alpha$ Montrer que

$$u_n = 4\sin^2(2^n\alpha)$$

2. Montrer que $\lim u_n = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{k\pi}{2^N}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et k entier dans $[0, 2^{N-1}]$.

3. Montrer que $\lim u_n = 3$ si et seulement si $\alpha = \frac{k\pi}{3\times 2^N}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et k entier dans $[0, 2^{N-1}]$, non multiple de 3.