Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
F 03 – Semestre 1

Devoir 1

A rendre le 6/03/03

Soient a, b, c et d quatre réels, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}, \text{ si elle existe} \end{cases}$$

on se propose d'étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I

Dans cet exercice on étudie deux cas particuliers.

1. On suppose que $ad - bc = 0$, montrer que la suite homographique est constante à partir du second terme.

2. On suppose que $c = 0$.

a . On pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b . Expliciter u_n est fonction de n

c . En déduire le sens de variation et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II

On suppose désormais que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} & \to & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\} \\ x & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_0 = -\frac{d}{c}$ et $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \neq v_n$$

3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors

$$cl^2 + (d-a)l - b = 0 \qquad (1)$$

On note $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$

4. Dans cette question on suppose que $\Delta > 0$. Soient α et β les deux racines de (1).

a . Montrer que si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

b . On suppose $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$, et on pose

$$U_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \quad \text{et} \quad q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$$

montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

c . En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Dans cette question on suppose que $\Delta = 0$. Soit α la racine de (1).

a . Montrer que si $u_0 = \alpha$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

b . On suppose $u_0 \neq \alpha$, et on pose

$$U_n = \frac{1}{u_n - \alpha} \quad \text{et} \quad r = \frac{2c}{a + d}$$

montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

c . En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Dans cette question on suppose que $\Delta < 0$. Quel effet cette hypothèse a-t-elle sur la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice III

Etudier la limite de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2}$.