Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
F 03 – Semestre 1

Feuille d'exercices 6

Compacité

Exercice I

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i\in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini. Comparez avec le théorème de Borel-Lebesgue.

1. $A =]0,1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

2. $A = [0,1]$, $\Omega_i =]-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

3. $A =]0,+\infty[$, $\Omega_i =]0,i[$, $I = \mathbb{N}^*$

Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})$ et $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il compact ?

2. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass[1] que peut-on dire des points d'accumulations de $\overline{A}$?

3. Determiner A', A^*, $\overline{A}$, $\mathring{A}$ et ∂A.

Exercice III

1. Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut-elle être convergente ?

2. L'ensemble des termes d'une suite convergente admet-il toujours au moins un point d'accumulation ? Sinon quelle(s) conditions faut-il ajouter ? Si oui, est-ce que ce point d'accumulation est necessairement la limite de la suite ?

[1] Karl Weierstrass, mathématicien allemand, du XIXe siècle, est connu notamment pour sa construction de la théorie des fonctions complexes. Dans ses conférences de 1859-60 Weierstrass donne une introduction inovante à l'analyse et en 1860-61, il traite du calcul intégral. Dans son cours de 1863-64 sur la théorie générale des fonctions analytiques, Weierstrass commence à formuler sa théorie des nombres réels. La notion de convergence uniforme que vous verrez en CS 201 est due à Weierstrass. Il a aussi contribué à la théorie des formes bilinéaires et quadratiques que vous verrez en CS 106.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

Exercice IV

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, deux ensembles.

1. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ est-elle toujours vraie sans l'hypothèse A ouvert ?

3. Donner un exemple d'ensembles ouverts A et B tels que les quatre ensembles

$$A \cap \overline{B}\ ,\quad \overline{A} \cap B\ ,\quad \overline{A \cap B} \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

soient tous différents.

Exercice V

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble E

2. Toute suite d'éléments de E est-elle forcément convergente ?

3. Déterminer E^*

4. Démontrer que $E' \subset \{0\}$ puis en déduire E'

5. L'ensemble E est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?

6. Peut-on trouver un recouvrement de E par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini ?

7. L'ensemble E est-il compact ? Peut-on déduire la réponse à cette question, de la réponse à la question précédente ?

8. L'ensemble E est-il ouvert ? Quel est son interieur ?

9. Déterminer la frontière de E.

Exercice VI

On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?

2. L'ensemble A est-il fermé ?

3. Expliciter un recouvrement de A par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

4. L'ensemble A est-il compact ?