Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — F 03 – Semestre 1

# Feuille d'exercices 3

*Séries numériques*

## Exercice I

**1.** Montrer, par récurrence, que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**2.** Les sommes précédentes dépendent-elles de $i$ ? de $n$ ?

**3.** Que vallent les sommes suivantes ?

$$\sum_{j=1}^{n} i, \quad \sum_{j=1}^{n} j, \quad \sum_{t=1}^{n} t, \quad \sum_{t=1}^{n} t^2$$

## Exercice II

Soit $(u_n)$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2^p} \text{ pour } n = 2p \\ u_n = \frac{1}{2^{p+1}} \text{ pour } n = 2p-1 \end{cases}$$

Etudier cette série successivement par la règle de Cauchy puis par la règle de d'Alembert[1].

## Exercice III

Calculer les sommes partielles des séries suivantes et en déduire leur nature. En cas de convergence trouver leur valeur.

---

[1] Jean d'Alembert, mathématicien français du XVIIIe siècle, fut l'un des premiers a étudier les équations différentielles et à les utiliser en physique. Ses travaux en analyse sont importants. En 1754 dans l'article *Différentiel* du volume IV de *L'Encyclopedie* il suggère la mise en place de bases fermes pour la notion de limite. Le nom de d'Alembert est également associé au théorème de Gauß-d'Alembert, dont une formulation moderne est : " tout polynôme de degré $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ à $n$ racines complexe s comptées avec leur multiplicité."

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

**1.** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2(n+3)(n+2)}$

**2.** $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+\frac{4n+4}{n^2})$

## Exercice IV

Determiner la nature des séries de terme général $(u_n)$

**1.** $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

**2.** $u_n = \frac{n+1}{n^3+1}$

**3.** $u_n = \frac{n^6+\sqrt{n}}{n!}$

**4.** $u_n = \frac{e^n}{n!}$

**5.** $u_n = \frac{1}{n3^n}$

**6.** $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^3+n^2}$

**7.** $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}3^n$

**8.** $u_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

**9.** $u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ pour $n \geq 2$

## Exercice V

**1.** En considérant la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^i$ montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(j) = \frac{\cos(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$$

**2.** Determiner la nature des séries de terme général $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$

## Exercice VI

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

**1.** La série est-elle convergente ? Absolument convergente ?

**2.** Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction définie par $\sigma(3j+1) = 2j+1$, $\sigma(3j+2) = 4j+2$, $\sigma(3j+3) = 4j+4$. Montrer que $\sigma$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

**3.** On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2}S$. Comment expliquez-vous ce résultat ?