

Interrogation du 13/10/2003

Corrigé

Exercice I

On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \exp(4y - x^2 - y^2) \\ (4 - 2y) \exp(4y - x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

le point (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x \exp(4y - x^2 - y^2) = 0 \\ (4 - 2y) \exp(4y - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x = 0$ et $y = 2$. Déterminons la nature du point critique $(0, 2)$.

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} (-2 + 4x^2) \exp(4y - x^2 - y^2) & -2x(4 - 2y) \exp(4y - x^2 - y^2) \\ -2x(4 - 2y) \exp(4y - x^2 - y^2) & ((4 - 2y)^2 - 2) \exp(4y - x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

ainsi

$$Hf(0, 2) = \begin{pmatrix} -2 \exp(4) & 0 \\ 0 & -2 \exp(4) \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont négatives, le point critique est donc un maximum.

Exercice II

1. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x(x - 1)(x + 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y) \in \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$. La matrice hessienne de f en (x, y) est donnée par

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$Hf(-1, 0) = Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont 8 et 2, donc strictement positives, donc $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont des minima.

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont -4 et 2 , donc $(0, 0)$ est un point selle.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in \mathcal{C}_0 &\iff f(x, y) = 0 & (1) \\
 &\iff y^2 = 2x^2 - x^4 \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4} \\ 2x^2 - x^4 \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4} \\ x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases} & (2)
 \end{aligned}$$

Considérons alors

$$\begin{aligned}
 g : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{2x^2 - x^4} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{2x^2 - x^4} & \text{si } x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a $g(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Il résulte de (2) que $f(x, y) = 0$ si et seulement si $y = g(x)$ ou $y = -g(x)$. Par suite \mathcal{C}_0 est la réunion des courbes représentatives de g et de $-g$. La fonction g est dérivable sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et on a

$$g'(x) = \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

ainsi $g'(0) = \sqrt{2}$ (et donc $-g'(0) = -\sqrt{2}$). Les tangentes en $(0, 0)$ ont pour équations $y = \sqrt{2}x$ et $y = -\sqrt{2}x$, ce sont les lignes séparatrices de col.

3. Soit $k > 0$ alors

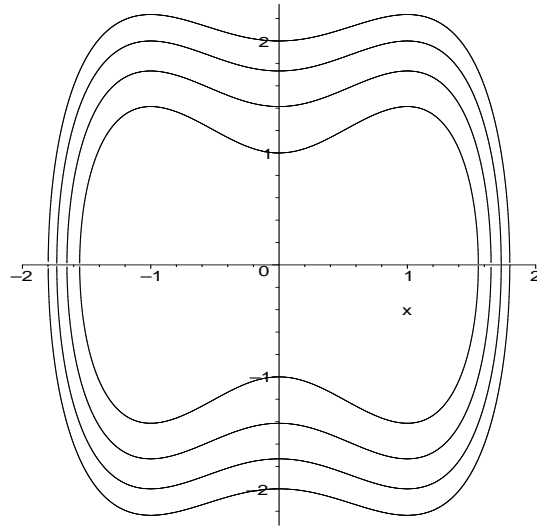
$$\begin{aligned}
 f(x, y) = k &\iff y^2 = k + 1 - (x^2 - 1)^2 \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ k + 1 - (x^2 - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ |x^2 - 1| \leq \sqrt{k + 1} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ 1 - \sqrt{k + 1} \leq x^2 \leq 1 + \sqrt{k + 1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Contrairement à la question 3 de l'exercice III on a $1 - \sqrt{k+1} < 0$, ainsi ce dernier système équivaut à

$$\begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ x \in [-\sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}, \sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}] \end{cases}$$

4. Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau. La courbe de niveau a une tangente horizontale lorsque le gradient est vertical c'est-à-dire lorsque $4x^3 - 4x = 0$ ce qui se produit lorsque $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. La courbe de niveau a une tangente verticale lorsque le gradient est horizontal ce qui se produit lorsque $y = 0$.

5. Les résultats des questions précédentes permettent de tracer les courbes suivantes :



Exercice III

Soit $n \geq 2$. Considérons f et g deux fonctions définies de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} admettant un minimum en $X^* \in \mathbb{R}^n$.

1. On a

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(X^*) = g(X^*) \frac{\partial f}{\partial x}(X^*) + f(X^*) \frac{\partial g}{\partial x}(X^*) = 0$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial y}(X^*) = g(X^*) \frac{\partial f}{\partial y}(X^*) + f(X^*) \frac{\partial g}{\partial y}(X^*) = 0$$

donc X^* est un point critique de fg .

2. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $v = X - X^*$. Comme X^* est un point critique, le développement limité de f et g à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X^*) + \frac{1}{2} {}^*v \mathbf{H} f(X^*) v + o(\|v\|^2) \\ g(X) &= g(X^*) + \frac{1}{2} {}^*v \mathbf{H} g(X^*) v + o(\|v\|^2) \end{aligned}$$

ainsi

$$fg(X) = f(X^*)g(X^*) + \frac{1}{2} {}^*v (g(X^*) \mathbf{H} f(X^*) + f(X^*) \mathbf{H} g(X^*)) v + o(\|v\|^2)$$

or la matrice $g(X^*) \mathbf{H} f(X^*) + f(X^*) \mathbf{H} g(X^*)$ peut ne pas être définie positive si $f(X^*) \leq$ ou $g(X^*) \leq$.

Cette remarque mène à la construction du contre-exemple suivant : $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2$ et $g(x, y) = -x^2 - y^2 - 1$. Ces deux fonction ont $(0, 0)$ comme comme extremum, en revanche leur produit fg a un point selle en $(0, 0)$ puisque

$$\mathbf{H}(fg)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$