Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2006

Interrogation du 13/10/2003

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (6 points)

Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \exp(4y - x^2 - y^2)$$

Trouver les extrema de f.

Exercice II (8 points)

Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$. Soit $k \in [0, +\infty[$ et $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = k\}$.

1. Trouver les points critiques de f et indiquez leur nature.

2. Déterminer les équations de $\mathcal{C}_0$. En déduire les lignes séparatrice du col que vous avez trouvé à la question 1.

3. Déterminer les équations de $\mathcal{C}_k$ lorsque $k > 0$

4. Trouver les points pour lesquels $\mathcal{C}_k$ admet une tangente verticale ou horizontale.

5. Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}_k$ pour $k \geq 0$

Exercice III (6 points)

Soit $n \geq 2$. Considérons f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ admettant un extremum en $X^* \in \mathbb{R}^n$.

1. Le produit fg admet-il toujours X^* comme point critique ? Donner une démonstration ou un contre-exemple.

2. Le produit fg admet-il toujours X^* comme extremum ? Donner une démonstration ou un contre-exemple.