Examen du 18/11/2003

Corrigé

Exercice I

1. Le point (x, y) est critique pour f si et seulement si $\nabla f(x, y) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x^2y + 4x = 0 \\ x^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^3 \\ \frac{3}{2}x^5 + 4x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^3 \\ x(\frac{3}{2}x^4 + 4) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y) = (0, 0)$. D'autre part

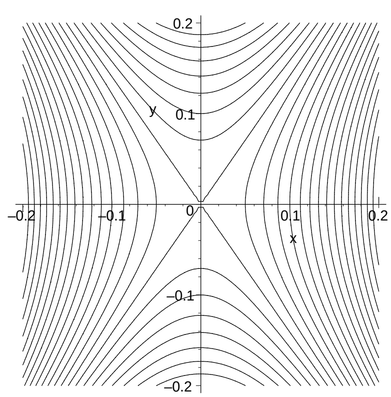
$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 + 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & -2 \end{pmatrix}$$

ainsi

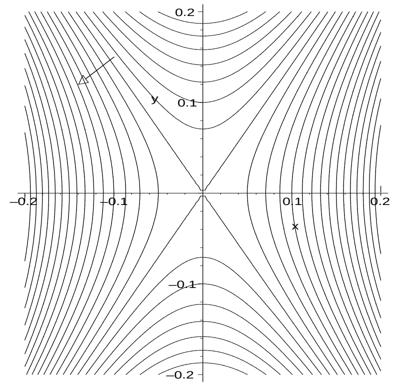
$$\mathrm{H}\, f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de cette matrice sont $4 > 0$ et $-2 < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle. Comme il n'y a pas d'autre point critique, f n'admet pas d'extremum.

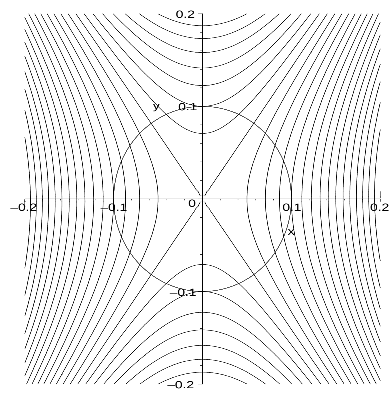
2. La forme quadratique associée à $\mathrm{H}\, f(0, 0)$ est $q(h, k) = 4h^2 - 2k^2$ ainsi $q(h, k) = 0$ équivaut à $(2h - \sqrt{2}k)(2h + \sqrt{2}k) = 0$, les lignes de niveau ont donc les équations suivantes : $k = \sqrt{2}h$ et $k = -\sqrt{2}h$. Comme $\sqrt{2} > 1$ les courbes de niveau de f sont les suivantes



3. Le gradient est orthogonal au courbes de niveau et pointe dans la direction où les courbes de niveau croissent.



4. Considérons le graphe suivant



Les extrema se trouvent au points tangence du cercle et des courbes de niveau, les minima se trouvent sur les points du cercle qui se trouvent sur la courbe de niveau d'altitude la plus faible : $(-1/10, 0)$ et $(1/10, 0)$

5. Soit L définie par $L(x, y, \lambda) = x^3y + 2x^2 - y^2 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - \frac{1}{100})$ alors $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} 3x^2y + 4x + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{100} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x(3xy + 4 + 2\lambda) = 0 \\ y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{100} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(4 + 2\lambda) = 0 \\ x^2 = \frac{1}{100} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x(xy + 2) = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{100} \end{cases}$$

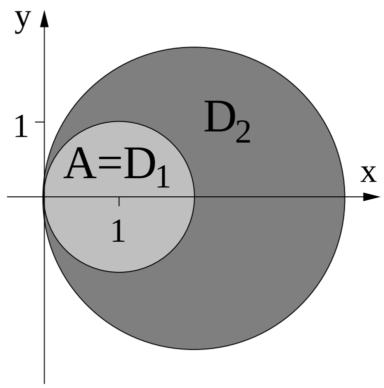
ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -2 \\ x = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -2 \\ x = -\frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 0 \\ y = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 0 \\ y = -\frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ xy = -2 \\ (x + y)^2 = \frac{1}{100} - 4 \end{cases}$$

Il convient de noter que le dernier de ces cinq systèmes est impossible. Les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte $x^2+y^2=\frac{1}{100}$ pour le minimum trouvé à la question précédente est $\lambda=-2$.

Exercice II

1. Soit A l'ensemble admissible, D_1 le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1, D_2 le disque de centre $(2,0)$ et de rayon 2. On a $A=D_1\cap D_2$, or $D_1\subset D_2$ donc $A=D_1$.



2. On a

$$h_1(x,y)\leq 0 \Rightarrow h_2(x,y)\leq 0$$

donc la contrainte $h_2\leq 0$ est inactive.

3. Puisque la contrainte $h_2\leq 0$ est inactive, considérons

$$L(x,y,\lambda,\alpha)=f(x,y)+\lambda(h_1(x,y)+\alpha^2)$$

On a

$$\nabla L(x,y,\lambda,\alpha)=\begin{pmatrix} 1+2\lambda(x-1) \\ 1+2\lambda y \\ (x-1)^2+y^2-1+\alpha^2 \\ 2\alpha\lambda \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y,λ,α) est un point critique de L si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ 1+2\lambda(x-1)=0 \\ 1+2\lambda y=0 \\ (x-1)^2+y^2-1+\alpha^2=0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ 1=0 \text{ (impossible)} \\ 1=0 \text{ (impossible)} \\ (x-1)^2+y^2-1+\alpha^2=0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ x=1-\frac{1}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1 \end{array}\right.$$

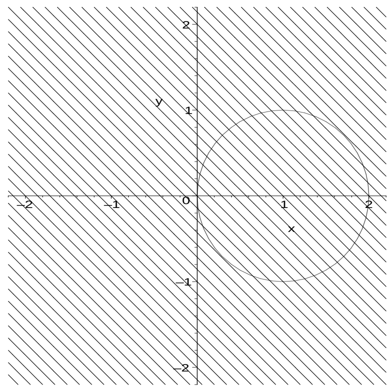
ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

La condition nécessaire pour être la solution du problème de minimisation est d'appartenir à

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

4. Les courbes de niveau de f sont des droites.



Le gradient est orienté vers le haut et la gauche. Le minimum se trouve au point du disque D_1 qui se trouve sur la courbe de niveau d'altitude la plus faible :

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice III (Options CS, GI, MS)

1. Soit $g(x) = 4x^3 + x - 1$, la fonction est polynomiale donc dérivable et $g'(x) = 12x^2 + 1 > 0$ ainsi g est strictement croissante. En outre $\lim_{-\infty} g = -\infty$, $\lim_{+\infty} g = +\infty$ et g est continue. Ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle a donc une seule racine. Comme $g(\frac{1}{2}) = 0$ on a $\frac{1}{2}$ comme unique racine de g.

2. Soit (x, y, z) un point du paraboloïde. La distance de ce point à $(1, 1, 0)$ est

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

or $z = x^2 + y^2$ ainsi cette distance se ré-écrit

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2+y^2)^2}$$

Il s'agit de trouver (x, y) qui minimise cette fonction. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que la distance est positive, il convient de minimiser la fonction f définie par

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2+y^2)^2 \end{array}$$

On a

$$\nabla f(x,y) = 2 \begin{pmatrix} x - 1 + 2x(x^2+y^2) \\ y - 1 + 2y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 + 2x(x^2+y^2) = 0 \\ (x-y) + 2(x^2+y^2)(x-y) = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (x-y)(1+2x^2+2y^2)=0 \\ x-1+2x(x^2+y^2)=0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x=y \\ 4x^3+x-1=0 \end{cases}$$

en vertu de la question 1, ce système équivaut à $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Par ailleurs,

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = 2\begin{pmatrix} 1+6x^2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 1+6y^2+2x^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{H}\, f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

le determinant de cette matrice est $32>0$ et la trace est $12>0$ donc la matrice a deux valeurs propres strictement positives, par suite $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est un minimum de f.

Exercice III (Option MIF)

Tous les calculs sont effectués sous l'hypothèse[1] que $\rho < |1|$.

1. On a

$$L[\mu_X,\mu_Y] = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_i-\mu_X)^2}{\sigma^2} - 2\rho\frac{(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sigma^2} + \frac{(y_i-\mu_Y)^2}{\sigma^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Pour alléger les notations, posons

$$A = \left(\frac{-1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n$$

Il vient

$$L[\mu_X,\mu_Y] = A^n\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_i-\mu_X)^2}{\sigma^2} - 2\rho\frac{(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sigma^2} + \frac{(y_i-\mu_Y)^2}{\sigma^2}\right]\right\}$$

2. On a

$$\ln(L(\mu_X,\mu_Y)) = n\ln(A) + \left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i-\mu_X)^2}{\sigma^2} - 2\rho\frac{(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sigma^2} + \frac{(y_i-\mu_Y)^2}{\sigma^2}\right]\right\}$$

3. Pour maximiser la log-vraisemblance, il faut dans un premier temps déterminer le (ou les) vecteur(s) qui annule(nt) le gradient et dans un second temps vérifier que les valeurs propres de la matrice héssienne au point critique admet deux valeurs propres négatives. On peut dans ce cas conclure que le point critique trouvé est un maximum local. Posons

$$C = \frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} < 0$$

[1] Cela aurait-il un sens de considérer une gaussienne bi-variée lorsque $\rho = 1$?

La log-vraisemblance se ré écrit alors comme suit :

$$\ln(L[\mu_X, \mu_Y)]) = n\ln(A) + C\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu_X)^2 - 2\rho(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y) + (y_i-\mu_Y)^2\right]$$

Il faut chercher le où les points qui annule $\nabla \ln L(\mu_X, \mu_Y)$, le gradient de la log-vraisemblance, soit résoudre le système de deux équations

$$\begin{cases} C\left(-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X) + 2\rho\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)\right) = 0 \\ C\left(-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y) + 2\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)\right) = 0 \end{cases}$$

Il vient immédiatement que seul le vecteur $\hat{\mu}_X = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$, $\hat{\mu}_Y = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}$ résoud ce système. D'un point de vue statistique, ceci signifie que les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les *moyennes d'échantillon*. Ceci signifie dans ce cas que la méthode du maximum de vraisemblance est identique à la méthode des moments, vous reverrez ceci en MF 231 (Statistiques financières I : inférence et estimation). Il est maintenant facile de voir que la matrice hessienne est

$$H\ln(L(\mu_X, \mu_Y)) = \begin{pmatrix} 2Cn & -2Cn\rho \\ -2Cn\rho & 2Cn \end{pmatrix}$$

où $C < 0$. Posons $B = 2Cn < 0$. Les valeurs propres[2] sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} B-\lambda & -B\rho \\ -B\rho & B-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire les racines de l'équations du second degré

$$(B-\lambda)^2 - B^2\rho^2 = 0$$

Il vient que $\lambda = B \pm B\rho$. Les deux valeurs propres sont négatives quel que soit $\rho \in]-1, 1[$ puisque $B < 0$. Puisque que la matrice hessienne est défini négative en chaque point, le maximum local est aussi global.

[2]Nous utilisons délibérement la méthode générale, celle qui consiste à regarder les valeurs propres de la matrice héssienne au point considéré.