Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S5 – Année 2003-2004
CS 202 – Introduction à l'optimisation | Promotion ESILV 2006

Examen du 18/11/2003

Durée de l'épreuve : 2 heures

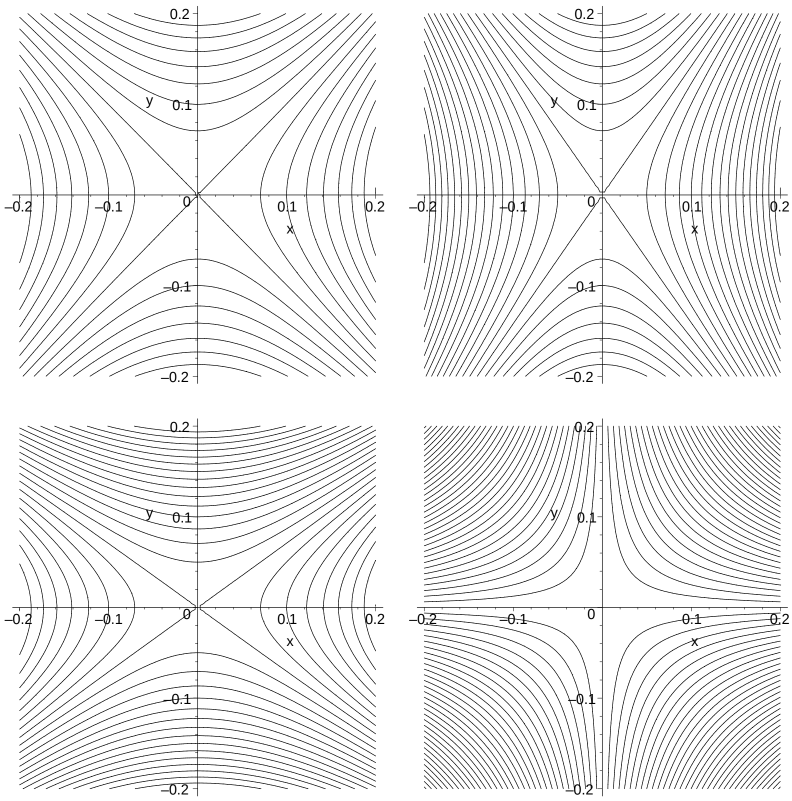
L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Tous les exercices sont indépendants. Vous devez rendre ce sujet avec votre copie. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (7 points)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^3y + x^2 - 2y^2 + 1$

1. Montrer que f n'admet pas d'extremum.

2. Les courbes de niveau suivantes sont dessinées dans un repère orthonormé. Indiquez sur le sujet quelle figure représente les courbes de niveau de f et expliquez pourquoi sur la copie.



3. Au point $(-0.1; 0.15)$ tracez la direction et le sens du vecteur $\nabla f(-0.1; 0.15)$.

4. Au moyen des courbes de niveau, trouvez les minima de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = \frac{1}{100}$.

5. Déterminez le(s) multiplicateur(s) de Lagrange associés à la contrainte $x^2 + y^2 = \frac{1}{100}$ pour les minima trouvés à la question précédente.

Exercice II (7 points)

Soit f, h_1 et h_2 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+y \\ h_1(x,y) &= (y-1)^2+x^2-1 \\ h_2(x,y) &= (y-2)^2+x^2-4 \end{aligned}$$

Considérons le problème de minimisation de f sous les contraintes $h_1 \leq 0$ et $h_2 \leq 0$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble admissible

2. Montrer que l'une des contraintes est inactive

3. Donner une condition nécéssaire pour que (x,y) soit solution du problème de minimisation.

4. Au moyen des courbes de niveau de f, indiquez quelle est la solution du problème de minimisation.

Exercice III (6 points – Options CS, GI, MS)

1. Montrer que $x = \frac{1}{2}$ est la seule solution réelle de $4x^3 + x - 1 = 0$.

2. Déterminer le ou les points du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ qui se trouvent le plus près du point $(1,1,0)$.

Exercice III (6 points – Option MIF)

Soit $f(x,y)$ la loi de probabilité jointe du couple de variables aléatoires (X,Y), où μ_X est l'espérance de X, μ_Y l'espérance de Y, et $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ l'écart type de X et de Y. Dans la suite de cet exercice, on considérera le cas où la loi de probabilité jointe est la loi normale bi-variée, donnée par l'équation ci-dessous :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma^2} \right] \right\}$$

où ρ est le coefficient de corrélation entre X et Y. Cette loi normale bi variée dépend donc ici des 4 paramètres μ_X, μ_Y, σ et ρ. Notre statisticien connaît σ et ρ, mais il ne connaît en revanche pas μ_X et μ_Y. Afin d'estimer ces deux paramètres μ_X et μ_Y, il tire un échantillon $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)...(x_n,y_n)]$, où chaque (x_i,y_i) pour $i = 1,2...n$ est une réalisation *indépendante* de la loi normale bi-variée.

1. Déterminer la fonction de vraisemblance $L[x_1,y_1,x_2,y_2...x_n,y_n,\mu_X,\mu_Y]$

2. Déterminer la fonction de ln-vraisemblance, où ln est le logarithme népérien.

3. Maximiser la ln-vraisemblance par rapport aux deux paramètres inconnus du statisticien. On notera $(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y)$ ce maximum.