Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2006

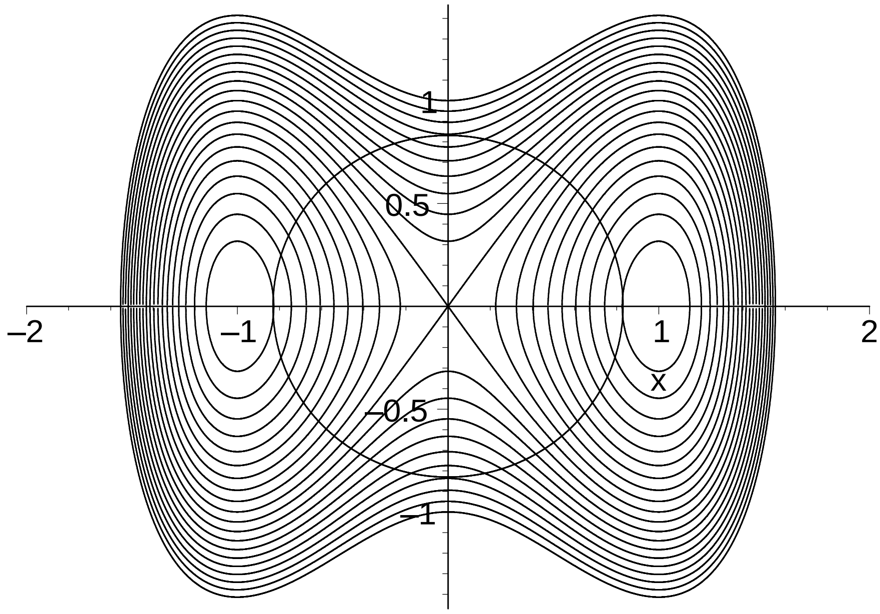
Devoir 2

Corrigé

Exercice I

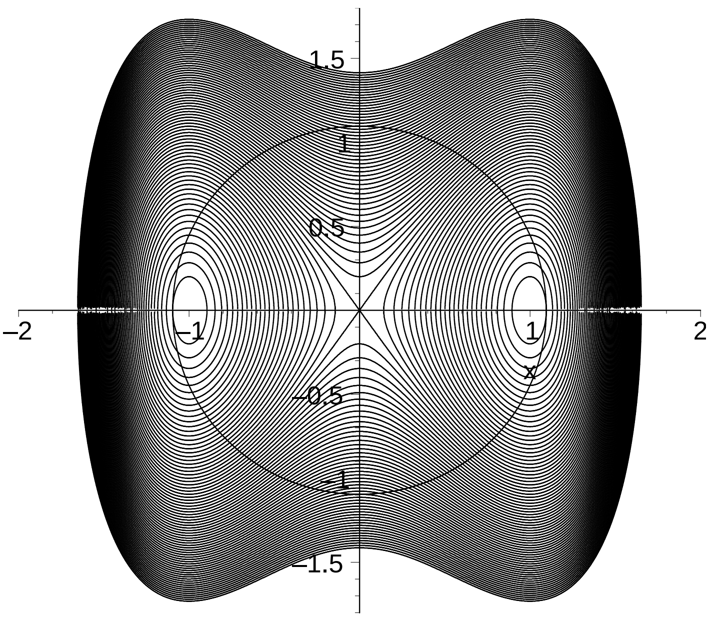
Il convient de distinguer trois cas

Premier Cas : $R \leq 1$. Traçons le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. Les minima locaux sous la contrainte d'appartenance au disque s'obtiennent graphiquement en cherchant les courbes de niveau de plus basse altitude ayant une intersection non vide avec le disque, puis en prenant cette intersection, qui est le point de tangence entre une courbe de niveau et le cercle. Nous trouvons les points $(-R,0)$ et $(R,0)$. De manière analogue les maxima locaux sous la contrainte d'appartenance au disque s'obtiennent graphiquement en cherchant les courbes de niveau de plus haute altitude ayant une intersection non vide avec le disque. Nous trouvons les points $(0,R)$ er $(0,R)$.



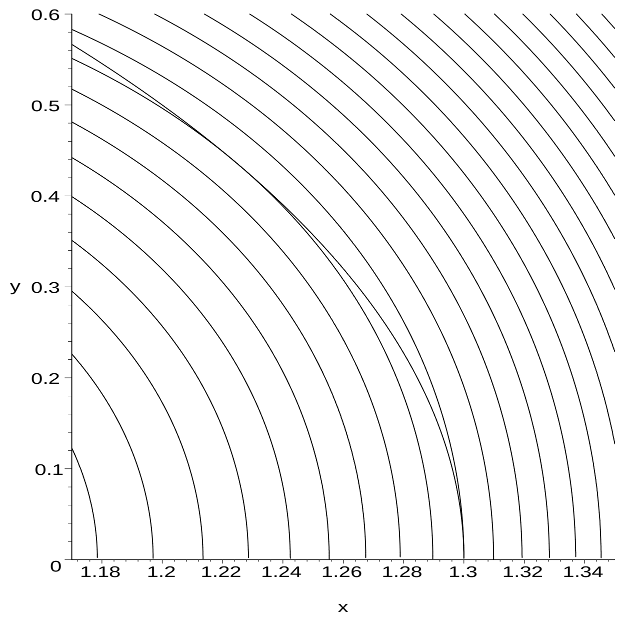
Le graphe ci-dessus on a été réalisé avec $R = 0.8$.

Deuxième Cas : $R \in]1,\alpha]$. Ici α est une valeur approximativement qu'il est difficile d'estimer graphiquement mais qui semble être égale à 1.2, dans la suite on montrera que $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Traçons le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. Il apparait cette fois, deux minima locaux non contraints : $(-1,0)$ et $(1,0)$. Ces minima s'ajoutent aux minima que l'on trouve par intersection des courbes de niveau au disque. Ainsi les minima sont $(-R,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(R,0)$. Les maxima locaux sont $(0,R)$ er $(0,R)$.



Le graphe ci-dessus on a été réalisé avec $R = 1.1$.

Troisieme Cas : $R > \alpha$. Traçons le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R. Il apparait les deux minima locaux non contraints : $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. En outre il y a un minimum en $(-\alpha, -\sqrt{R^2 - \alpha^2})$ $(-\alpha, \sqrt{R^2 - \alpha^2})$, $(\alpha, -\sqrt{R^2 - \alpha^2})$ et $(\alpha, \sqrt{R^2 - \alpha^2})$. Les maxima locaux sont en $(0, -R)$, $(0, R)$, $(-R, 0)$ et $(R, 0)$. Nous présentons ci-après un "zoom" des courbes de niveau présentant un point de tangence en $(\alpha, \sqrt{R^2 - \alpha^2})$ et en $(0, R)$. Les quatre autre points de tangence s'obtiennent par symétrie.



Le graphe ci-dessus on a été réalisé avec $R = 1.3$.

Exercice II

1. Les ensembles B_R et ∂B_R sont respectivement le disque et le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R, ainsi

$$\begin{aligned} B_R &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq R^2\} \\ \partial B_R &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = R^2\} \end{aligned}$$

2. La fonction f admet un seul point critique dans B_R qui n'est pas un extrema. Si elle admet un extrema, celui-ci est donc sur la frontière de B_R.

3. Il est possible d'expliciter la contrainte : $y^2 = R^2 - x^2$. Donc problème d'extremisation se résume au problème d'extremisation de g définie sur $[-R, R]$ par $g(x) = x^4 - 3x^2 + R^2$. La fonction g est dérivable et sa dérivée est $g'(x) = 4x^3 - 6x$. Comme $\frac{\sqrt{6}}{2} > R$ la fonction g est croissante sur $[-R, 0]$ et décroissante sur $[0, R]$, elle admet donc deux minima, l'un en $-R$ et l'autre en R, ainsi qu'un maximum en 0. Par suite les minima de f sous la contrainte sont $(-R, 0)$ et $(R, 0)$ et les maxima sont $(0, -R)$ et $(0, R)$.

4. Pour répondre à cette question, il convient d'effectuer la minimisation sous contrainte au moyen de la méthode de Lagrange. Sont donc L la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$L(x, y, \lambda) = x^4 - 2x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$$

les triplets (x, y, λ) qui annullent le gradient de L vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 - 4x + 2x\lambda = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} y(\lambda + 1) = 0 \\ x(2x^2 - 2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = R^2 \\ 2R^2 - 2 + \lambda = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ x(2x^2 - 3) = 0 \\ y^2 = R^2 - x^2 \end{array} \right.$$

Comme $x^2 = \frac{3}{2}$ est en contradiction avec $y^2 \geq 0$, ce système qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -R \\ \lambda = 2 - 2R^2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = R \\ \lambda = 2 - 2R^2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = -R \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = R \end{array} \right.$$

Ainsi on retrouve les 2 minima $(-R, 0)$ et $(R, 0)$ donc le multiplicateur de Lagrange associé est $2 - 2R^2$ et les 2 maxima $(0, -R)$ et $(0, R)$ donc le multiplicateur de LAgrange associé est -1. Il convient de noter que plus R est proche de 1, plus le multiplicateur de Lagrange associ e au minima est petit, ce qui signifie que la contrainte est moins "virulente".

Exercice III

Les minima $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont dans le disque de rayon R centré en $(0, 0)$. Il convient de chercher d'autres extrema eventuels sur le cercle de rayon R centré en $(0, 0)$.

Comme dans la question 3 de l'exercice II, il est possible d'expliciter la contrainte : $y^2 = R^2 - x^2$. Donc problème d'extremisation se résume au problème d'extremisation de g définie sur $[-R, R]$ par $g(x) = x^4 - 3x^2 + R^2$. La fonction g est dérivable et sa dérivée est $g'(x) = 4x^3 - 6x$. Il convient de discuter deux cas

- Si $R \in]1, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ alors la fonction g est croissante sur $[-R, 0]$ et décroissante sur $[0, R]$, elle admet donc deux minima, l'un en $-R$ et l'autre en R, ainsi qu'un maximum en 0. Par suite les minima de f sous la contrainte sont $(-R, 0)$, $(-1, 0)$,(1,0) et $(R, 0)$. Les maxima sont $(0, -R)$ et $(0, R)$.

- Si $R > \frac{\sqrt{6}}{2}$ alors g est décroissante sur $[-R, -\frac{\sqrt{6}}{2}]$ puis croissante sur $[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0]$, décroissante sur $[0, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ et enfin croissante sur $[\frac{\sqrt{6}}{2}, 0]$. Nous retrouvons donc le résultat obtenu graphiquement dans l'exercice I, à savoir : Deux minima locaux non contraints : $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, des minima en $(-\alpha, -\sqrt{R^2 - \alpha^2})$ $(-\alpha, \sqrt{R^2 - \alpha^2})$, $(\alpha, -\sqrt{R^2 - \alpha^2})$ et $(\alpha, \sqrt{R^2 - \alpha^2})$ et des maxima locaux sont en $(0, -R)$, $(0, R)$, $(-R, 0)$ et $(R, 0)$. La valeur de α est $\frac{\sqrt{6}}{2}$.