

Devoir 1

Corrigé

Exercice I

1. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x(x-1)(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y) \in \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$.

2. La matrice hessienne de f en (x, y) est donnée par

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$Hf(-1, 0) = Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont 8 et 2, donc strictement positives, donc $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont des minima.

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont -4 et 2 , donc $(0, 0)$ est un point selle.

Exercice II

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff y^2 = 2x^2 - x^4 \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4} \\ 2x^2 - x^4 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4} \\ x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Considérons alors

$$\begin{aligned} g : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -\sqrt{2x^2 - x^4} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - x^4} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a $g(x) = -x\sqrt{2-x^2}$. Il résulte de (1) que $f(x, y) = 0$ si et seulement si $y = g(x)$ ou $y = -g(x)$. Par suite \mathcal{C}_0 est la réunion des courbes représentatives de g et de $-g$.

2. La fonction g est dérivable sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et on a

$$g'(x) = -\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

ainsi $g'(0) = -\sqrt{2}$ (et donc $-g'(0) = \sqrt{2}$). Au voisinage $(0,0)$ le graphe de g "ressemble" à la droite d'équation $y = g(0) + g'(0)x$ c'est-à-dire $y = -\sqrt{2}x$. Le graphe de $-g$ "ressemble" à la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$.

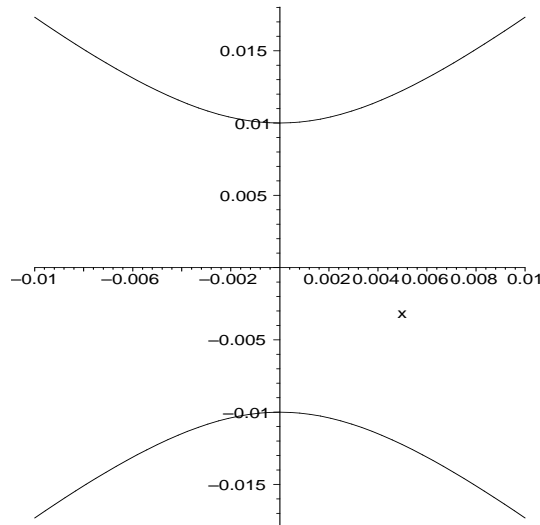
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{10000} &\iff -x^4 - 2x^2 + y^2 = \frac{1}{10000} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000}} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000}} \\ 2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $X = x^2$ on a $2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000} = -X^2 + 2X + \frac{1}{10000}$. Le trinôme du membre de droite a $\frac{10001}{2500}$ comme discriminant et ses racines sont $1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10001}{2500}}$ et $1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10001}{2500}}$. Ainsi $2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000} \geq 0$ équivaut à $|x| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10001}{2500}}}$ ce qui est toujours satisfait lorsque $(x, y) \in A$. Par suite $f(x, y) = \frac{1}{10000}$ et $(x, y) \in A$ équivaut à

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000}} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000}} \\ (x, y) \in A \end{cases}$$

on obtient le graphe suivant



D'autre part

$$\begin{aligned} f(x, y) = -\frac{1}{10000} &\iff x^4 - 2x^2 + y^2 = -\frac{1}{10000} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 - x^4 - \frac{1}{10000}} \text{ ou } y = -\sqrt{2x^2 - x^4 - \frac{1}{10000}} \\ 2x^2 - x^4 - \frac{1}{10000} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $X = x^2$ on a $2x^2 - x^4 - \frac{1}{10000} = -X^2 + 2X - \frac{1}{10000}$. Le trinôme du membre de droite a $\frac{9999}{2500}$ comme discriminant et ses racines sont $1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}}$ et $1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}}$. Contrairement à ce qui

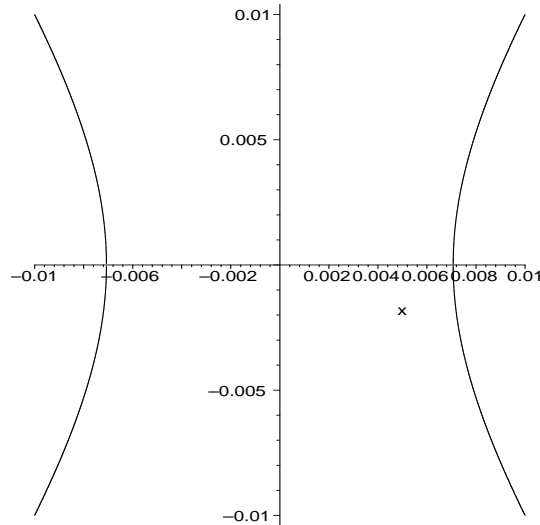
précède, ces deux racines sont positives. Ainsi $2x^2 - x^4 + \frac{1}{10000} \geq 0$ équivaut à

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}} \leq x^2 \leq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}}$$

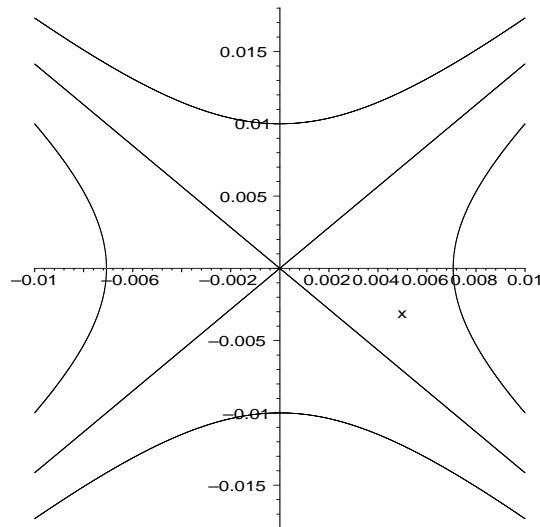
Lorsque $|x| \leq \frac{1}{100}$, la condition ci dessus est satisfaite si et seulement si

$$x \in \left[-\frac{1}{100}, -\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}}} \right] \cup \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9999}{2500}}}, \frac{1}{100} \right]$$

ainsi, on obtient le graphe suivant



En ajoutant les deux courbes qui ressemblent à des droites, que l'on a trouvé à la question précédente, on représente sur un même graphe $\mathcal{C}_0 \cap A$ et les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{10000}\} \cap A$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -\frac{1}{10000}\} \cap A$.



Exercice III

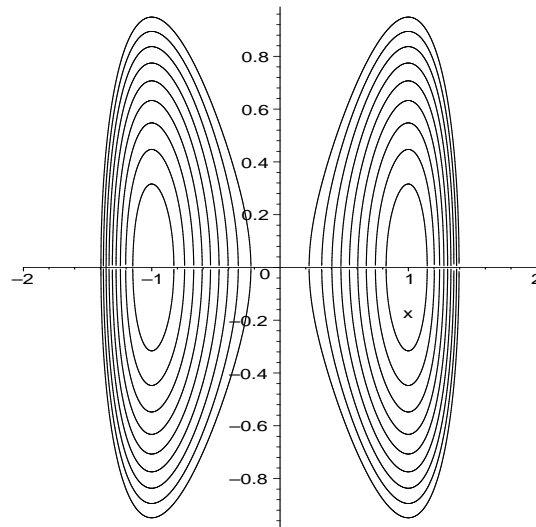
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors $f(x, y) = k$ équivaut à $x^4 - 2x^2 + y^2 = k$ ce qui équivaut à

$$(x^2 - 1)^2 + y^2 = k + 1 \tag{2}$$

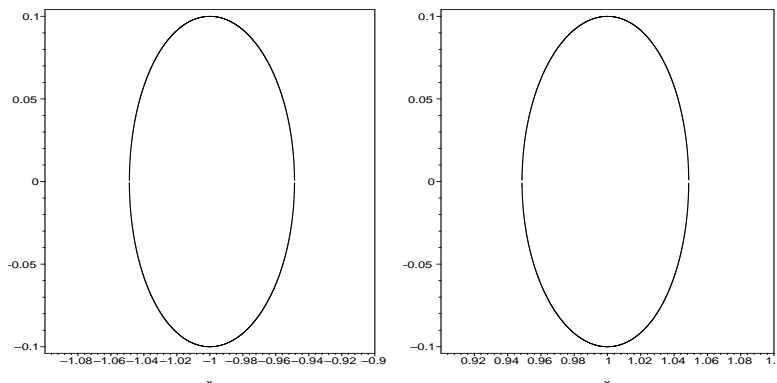
1. Si $k < -1$ l'équation précédente n'a pas de solution donc $\mathcal{C}_k = \emptyset$.
2. Si $k = -1$ alors (2) équivaut à $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$ ce qui équivaut à $x^2 = 1$ et $y = 0$ c'est-à-dire $(x, y) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$.
3. On suppose désormais que $k \in]-1, 0[$ alors

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = k &\iff y^2 = k + 1 - (x^2 - 1)^2 \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ k + 1 - (x^2 - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ |x^2 - 1| \leq \sqrt{k + 1} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ 0 < 1 - \sqrt{k + 1} \leq x^2 \leq 1 + \sqrt{k + 1} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ x \in [-\sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}, -\sqrt{1 - \sqrt{k + 1}}] \cup [\sqrt{1 - \sqrt{k + 1}}, \sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}] \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. On obtient le graphe suivant avec une dizaine de valeurs de k différentes.



5. Lorsque $\varepsilon = \frac{1}{100}$ les ensembles $\mathcal{C}_{-1+\varepsilon} \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_{-1+\varepsilon} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ sont représentés ci-dessous



Dans ce qui suit, considérons le demi-plan $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ car la situation est analogue dans le demi-plan symétrique. Posons $X = 2(x - 1)$ de sorte que $x = 1 + \frac{X}{2}$ et $Y = y$. Lorsque $k = -1 + \varepsilon$ on a $x \in [-\sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon}}, -\sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon}}] \cup [\sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon}}, \sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon}}]$. Comme $\sqrt{1 + u} - 1 = \frac{1}{2}u + o(u)$ il vient que $|X| \leq \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$. Ainsi X proche de 0 lorsque ε est proche de 0. D'autre part $f(x, y) = k$ équivaut à $(1 + \frac{X}{2})^4 - 2(1 + \frac{X}{2})^2 + Y^2 = k$ ce qui équivaut à $X^2 + Y^2 + O(X^3) = k + 1$. Comme $O(X^3) = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ alors que $k + 1 = O(\varepsilon)$, la courbe "ressemble" à un cercle. Le changement de variable $x = 1 + \frac{X}{2}$ et $Y = y$ correspond à une affinité orthogonale (dilatation) donc la courbe "ressemble" à une ellipse.

Exercice IV

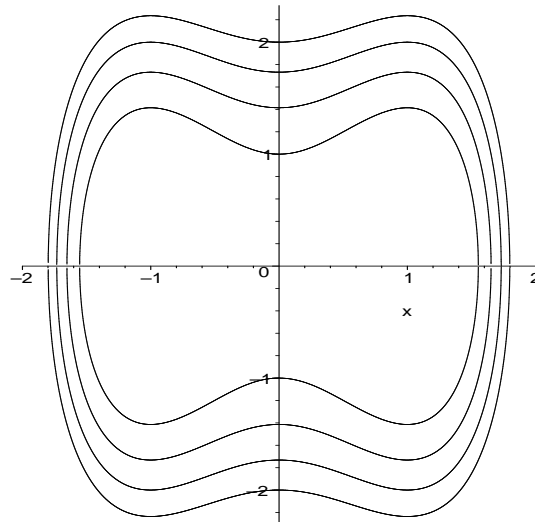
1. Soit $k > 0$ alors

$$\begin{aligned} f(x, y) = k &\iff y^2 = k + 1 - (x^2 - 1)^2 \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ k + 1 - (x^2 - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ |x^2 - 1| \leq \sqrt{k + 1} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ 1 - \sqrt{k + 1} \leq x^2 \leq 1 + \sqrt{k + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Contrairement à la question 3 de l'exercice III on a $1 - \sqrt{k + 1} < 0$, ainsi ce dernier système équivaut à

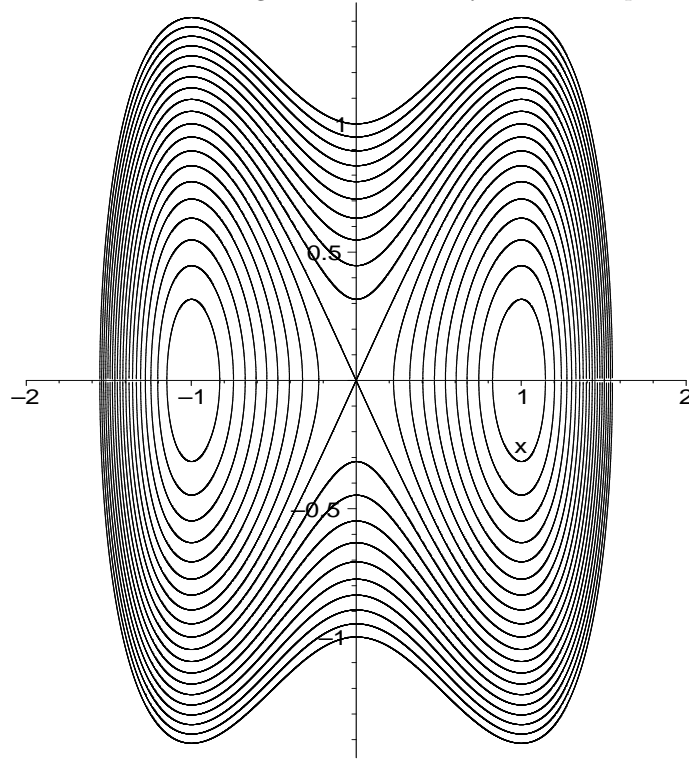
$$\begin{cases} y = \sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \text{ ou } y = -\sqrt{k + 1 - (x^2 - 1)^2} \\ x \in [-\sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}, \sqrt{1 + \sqrt{k + 1}}] \end{cases}$$

2. Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau. La courbe de niveau a une tangente horizontale lorsque le gradient est vertical c'est-à-dire lorsque $4x^3 - 4x = 0$ ce qui se produit lorsque $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. La courbe de niveau a une tangente verticale lorsque le gradient est horizontal ce qui se produit lorsque $y = 0$. On obtient le graphe suivant pour quelques valeurs de k



Courbes de Niveau de f

L'objet de ce devoir était de tracer les lignes de niveau de f . Elles sont présentées ci-après.



A titre d'illustration, voici le graphe de f

