

Devoir 1

A rendre le 1/10/2003

Considérons la fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par la relation $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$. L’objet de ce devoir est de tracer les courbes de niveau de f .

Exercice I

1. Déterminer les points critiques de f
2. Préciser la nature de chaque point critique trouvé dans la question 1.

Exercice II

Soit $\varepsilon = \frac{1}{100}$ et $A =]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Notons $\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$.

1. Trouver une fonction g définie sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ positive sur $[-\sqrt{2}, 0]$ et négative sur $[0, \sqrt{2}]$ telle que $\mathcal{C}_0 = \{(x, g(x)), x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\} \cup \{(x, -g(x)), x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$
2. Montrer $\mathcal{C}_0 \cap A$ est la réunion de deux courbes qui “ressemblent” à des droites dont les équations sont $y = \sqrt{2}x$ et $y = -\sqrt{2}x$.
3. Sur un même graphe représenter $\mathcal{C}_0 \cap A$ et les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{10000}\} \cap A$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -\frac{1}{10000}\} \cap A$.

Exercice III

Soit $k \in]-\infty, 0[$ et $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = k\}$.

1. Montrer que $k < -1$ entraîne $\mathcal{C}_k = \emptyset$.
2. Montrer que $k = -1$ entraîne $\mathcal{C}_k = \{(-1, 0), (1, 0)\}$.
3. On suppose $k \in]-1, 0[$, déterminer les équations de \mathcal{C}_k .
4. Représenter graphiquement les courbes \mathcal{C}_k pour quelques valeurs de k .
5. Soit $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_{-1+\varepsilon} \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_{-1+\varepsilon} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Expliquer pourquoi ces courbes “ressemblent” à des ellipses.

Exercice IV

Soit $k \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = k\}$.

1. Déterminer les équations de \mathcal{C}_k .
2. Représenter graphiquement les courbes \mathcal{C}_k .