

## Feuille d’exercices 4

### *Optimisation sous contraintes*

#### Exercice I

En utilisant la méthode du lagrangien<sup>1</sup> et les variables d’écart, déterminer le (ou les) points  $(x, y)$  qui maximise la fonction objectif  $f$  sous la contrainte donnée.

1.  $f(x, y) = 2y - x^2$ . Contraintes :  $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$  et  $x \geq 0, y \geq 0$ .
2.  $f(x, y) = xy$ . Contrainte :  $h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ .
3.  $f(x, y) = x^2 + x + 4y^2$ . Contraintes :  $k(x, y) = 2x + 2y \leq 1$  et  $x \geq 0, y \geq 0$ .

#### Exercice II

Refaire l’exercice I en utilisant le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.

#### Exercice III

On considère la fonction  $Z(x, y) = x + 2y$  et les contraintes

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Au moyen d’un graphe trouver les extrema de  $Z$ .

#### Exercice IV

Minimiser  $x^2 + y^2$  sous la contrainte  $x^2 + y \geq 1$ .

---

<sup>1</sup>Joseph-Louis Lagrange, mathématicien italien puis français, du XVIIIe et XIXe siècle. Il travailla dans les années 1790 au système métrique et enseigna à l’Ecole Polytechnique dont il participa à la fondation. Il excella dans toutes les disciplines d’analyse, de théorie des nombres et de mécanique celeste. En 1788 il publia *Mécanique analytique* qui est célèbre pour l’utilisation des équations différentielles. La mécanique devient alors une branche des mathématiques. En 1797 il publia la première théorie des fonctions d’une variable réelle.



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

## Exercice V (MIF)

Un investisseur se demande quelle fraction  $\alpha_i$  de sa richesse il devrait investir dans l'actif  $i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'actif  $i$  a un rendement qui est une variable aléatoire d'espérance  $\mu_i$  et de variance  $\sigma_i^2$ . On notera  $\mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  le vecteur des rendements espérés (ou  $T$  indique qu'il s'agit du transposé de  $\mu$ ), et  $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  le vecteur des fractions de la richesse investie. Soit  $V$  la matrice de variance covariance, comportant les variances  $\sigma_i^2$  sur la diagonale et les covariances  $\sigma_{ij}$  ailleurs. On rappelle que  $\text{Var}(\alpha^T X) = \alpha^T V \alpha$  et que  $\Delta(\mathbb{R}^+) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$  est le simplexe unitaire de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Quelle est l'équation d'un portefeuille quelconque ? Quelle est son espérance et sa variance ?
2. Formuler matriciellement le problème d'optimisation de notre investisseur s'il cherche à minimiser la variance des rendements de son portefeuille sous la contrainte que l'espérance de rendement soit égale à une constante et que la somme des fractions investies soit égale à un.
3. Soit les fonctions suivantes définies de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = a^T x$ ,  $g(x) = a^T x + cx^T x$ , ou  $c$  est un scalaire. On notera  $\nabla f(x)$ ,  $\nabla g(x)$  le gradient (qui est un vecteur ligne) de ces trois fonctions. Montrer que  $\nabla f(x) = a$  et que  $\nabla g(x) = a + 2cx$
4. Soit la fonction  $h(x) = x^T A x$ , ou  $A$  est une matrice symétrique. Posons plus spécifiquement

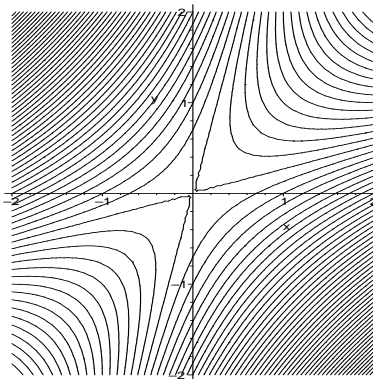
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

et  $x = (x_1, x_2)^T$ . Montrer que  $x^T A = (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2)$ . Déterminer  $x^T A x$ . Montrer que  $\nabla h(x) = 2x^T A$  s'il s'agit d'un vecteur ligne et que  $(\nabla h(x))^T = 2Ax$  s'il s'agit d'un vecteur colonne.

5.  $A$  étant la matrice de variance covariance, peut-on en déduire qu'elle est inversible ?
6. Formuler le lagrangien du problème  $L(x, \lambda)$ , avec  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}^2$  sous forme matricielle.
7. Déterminer  $\nabla_x L(x, \lambda)$ , le gradient du lagrangien par rapport à  $x$  s'il s'agit d'un vecteur colonne.

## Exercice VI

On considère la fonction  $f$  dont les courbes de niveau sont données ci-après. Le gradient en  $(1; 1)$  est orienté vers le haut et vers la droite.



1. Trouver graphiquement le ou les maximum(s) de  $f$  sous la contrainte  $x + y \leq 1$ .
2. Trouver graphiquement le ou les maximum(s) de  $f$  sous la contrainte  $x^2 + y^2 \leq 1$ .