Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2006

Feuille d'exercices 3

Optimisation sous contraintes d'égalité

Exercice I (MIF)

Une entreprise utilise deux facteurs de production (du travail et du capital) pour produire une certaine quantité de biens. Si f est la fonction de production, K (L) le nombre d'unités de facteur capital (travail), alors $Q = f(K, L)$, ou Q est la quantité de biens produite. On note w_L et w_K le prix unitaire du facteur travail et capital (respectivement) que l'entreprise considère comme des données exogènes. Soit Q une fonction de production de Cobb-Douglas[1] donnée par $Q = f(K, L) = K^\alpha L^\beta$, ou α et β sont deux paramètres.

1. A quelle condition cette fonction est elle homogène de degré 1 ?

2. Que signifie économiquement l'homogénéité de degré 1 ?

3. Représentez graphiquement une courbe de niveau de f dont l'équation est de la forme $K = g(L)$

4. Fixons une courbe de niveau a $Q = 10$. Calculez K pour $L = 10$ et pour $L = 11$. Interpreter économiquement le rapport $\frac{\Delta g}{\Delta L}$. D'une facon générale, comment peut on interepreter la pente d'une courbe de niveau en un point donné (L, K) ?

5. Soit $CT(K, L)$ la fonction de coût total. Représentez, sur le graphique précedent, une courbe d'iso-coût.

6. Ecrivez le programme d'optimisation lorsque la firme est contrainte de produire une quantité Q de biens.

7. Resolvez graphiquement ce problème d'optimisation.

8. Comment varie la quantité optimale de travail lorsque le prix du travail augmente. (Même question lorsque le prix du capital augmente)

9. Déterminez, en utilisant la méthode du Lagrangien, la quantité optimale K^* et L^* des facteurs de production capital et travail respectivement.

10. Comment varie la quantité K^* lorsque w_L augmente. Même question lorsque w_K augmente. Ces résultats étaient ils attendus ?

[1] Paul Douglas, économiste Américain du XXe siècle, sénateur démocrate de l'Etat de l'Illinois au Sénat des Etats-Unis, travailla sur des tests statistiques concernant la productivité marginale. Avec l'aide de Charles Cobb, il donna cette estimation de la fonction de production.

Paul Howard Douglas (1892–1976)

Exercice II

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema potentiels des fonctions f suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = 4x + 6y$ avec $x^2 + y^2 = 13$

3. $f(x, y) = x^2 y$ avec $x^2 + 2y^2 = 6$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec $x^4 + y^4 = 1$

5. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

6. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

7. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

8. $f(x, y, z) = x + 2y$ avec $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$

Exercice III (CS, GI, MS)

Refaire les exercices III et IV de la feuille d'exercices 2, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Expliciter ces multiplicateurs dans chaque cas et interpréter.

Exercice IV (CS, GI, MS)

Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ intersecte le paraboloid d'équation $z = x^2 + y^2$ en une ellipse. Trouver les points de l'ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

Exercice V

Trouver les extrema des fonctions f suivantes sur le domaine D indiqué

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, D étant le triangle fermé de sommets $(-1, 1)$, $(2, 1)$ et $(-1, -2)$.

2. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice VI (CS, GI, MS)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On consière A une matrice $n \times n$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^T A x + B \cdot x$ où x^T est la transposée de x et le $B \cdot x$ le produit scalaire de B et x.

1. Calculer ∇f

2. Calculer $\mathrm{H}\, f$