

Feuille d’exercices 2

Applications de l’optimisation sans contraintes

Exercice I (CS, GI, MS)

Une société de câblage doit placer un routeur gérant trois sites : A , B et C . Elle souhaite minimiser la longueur de câble utilisée. On suppose que (ABC) forme un triangle isocèle rectangle. Trouver le point F qui minimise $FA + FB + FC$. Un tel point est appelé point de Fermat¹.

Exercice II (MIF)

Une entreprise est en situation de monopole dans deux régions indépendantes, *i.e.* elle décide du prix de vente à afficher. La demande de la région 1 est $q_1(p) = 20 - 2p$ et la demande de la région 2 est $q_2(p) = 30 - p$. On sait que le décideur public a interdit à l’entreprise de pratiquer une discrimination par les prix. Soit

$$Q(p) = \sum_{i=1}^2 q_i(p)$$

la fonction de demande agrégée et

$$\Pi(p) = pQ(p) - CT(Q(p))$$

la fonction de profit agrégée, ou $CT(Q(p))$ est la fonction de coût total. On rappelle qu’une fonction de demande n’est jamais négative, *i.e.* $q(p) \geq 0 \forall p \in \mathbb{R}^+$.

1. Déterminer l’équation de la demande agrégée.
2. Cette fonction de demande agrégée est elle une fonction linéaire du prix.
3. En supposant que les coûts de production sont nuls et que la variable de décision de l’entreprise est le prix, déterminer le programme d’optimisation de l’entreprise.

¹Pierre Fermat, mathématicien français, du XVII^e siècle fut conseiller au parlement de Toulouse, il se passionnait pour les mathématiques. Il fonde en même temps que Descartes la géométrie analytique, est précurseur du calcul différentiel et il est à l’origine du calcul des probabilités avec Pascal. En étudiant l’arithmétique, il s’intéressa au chapitre concernant les triplets de Pythagore, c’est-à-dire aux ensembles de trois nombres x , y , z (par exemple 3, 4 et 5), pour lesquels l’égalité $x^2 + y^2 = z^2$ est vérifiée. D’après Fermat, l’équation $x^n + y^n = z^n$ n’a pas de solution entière pour $n > 2$. Par exemple, il n’existe pas d’entiers positifs x , y et z tels que $x^3 + y^3 = z^3$. Dans la marge de son exemplaire des *Arithmétiques*, il écrivit qu’il avait découvert une démonstration vraiment remarquable, mais qu’il ne pouvait l’écrire dans la marge (grand théorème de Fermat). Cette démonstration fut cherchée pendant 300 ans sans succès. En 1993, Andrew Wiles, trouve une démonstration du grand théorème de Fermat.



Pierre Fermat (1601-1665)

4. Calculer le (ou les) prix optimal (prix optimaux).
5. Représenter graphiquement la fonction de profit agrégée.
6. Faire les question 1 à 5 dans le cas ou $q_2(p) = 46 - p$.

Exercice III (CS, GI, MS)

Trouver trois nombres positifs dont la somme est 100 et dont le produit est maximum.

Exercice IV (CS, GI, MS)

Trouver les points du plan $2x - y + z = 1$ qui sont le plus pret du point $(-4, 1, 3)$.

Exercice V (MIF)

Soit $P_\theta(X_i = x_i)$ une loi de probabilité (discrète ou continue) connue du statisticien qui dépend d'un paramètre θ inconnu du statisticien. Soit (x_1, \dots, x_n) un échantillon observé, engendré selon la loi de probabilité $P_\theta(X_i = x_i)$. Le problème statistique est le suivant : comment le statisticien peut-il estimer le paramètre inconnu θ à partir de l'échantillon observé (x_1, \dots, x_n) . Notre statisticien sait par ailleurs que les $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ont été tirés de manière *indépendante*. On appelle *vraisemblance* la probabilité suivante $P_\theta[(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)] = L(x_1, \dots, x_n, \theta)$. La méthode que l'on va retenir pour estimer le paramètre inconnu θ à partir de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) est connue en statistique sous le nom de *méthode du maximum de vraisemblance*. On cherchera a maximiser la log-vraisemblance.

1. Quelle est la signification de la méthode d'estimation au maximum de vraisemblance ?
2. Supposons que $P_\theta(X_i = x_i)$ soit une loi de Bernoulli, i.e., $x_i \in \{0, 1\}$, de paramètre inconnu $\theta = p$. Ainsi $P_\theta(X_i = x_i) = p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}$. Déterminer la vraisemblance ainsi que la valeur de θ qui maximise cette vraisemblance. (Vérifier qu'il s'agit d'un maximum (local)).
3. Supposons que $P_\theta(X_i = x_i)$ soit une loi exponentielle de paramètre $\theta = \lambda$ inconnu. Ainsi $P_\theta(X_i = x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i}$. Déterminer la vraisemblance ainsi que la valeur de θ qui maximise cette vraisemblance. (Vérifier qu'il s'agit d'un maximum (local)).
4. Supposons que $P_\theta(X_i = x_i)$ soit une loi normale de paramètre $\theta = (\mu, \sigma)$ inconnu, où μ et σ représentent respectivement l'espérance mathématique et l'écart type. Ainsi

$$P_\theta(X_i = x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(1/2)\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

Déterminer la vraisemblance ainsi que la valeur de θ qui maximise cette vraisemblance. (Vérifier qu'il s'agit d'un maximum (local)).