Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2006

Feuille d'exercices 1

Optimisation sans contraintes

Exercice I

Déterminer le gradient, les points critiques et la matrice hessienne[1] aux points critiques, de chaque fonction f donnée ci-dessous. En déduire les extrema de ces fonctions.

1. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$

4. $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

5. $f(x, y) = xy - 2x - y$

6. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

7. $f(x, y) = e^x \cos(y)$

8. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

9. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

10. $f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$

11. $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

Exercice II

Pour chaque fonction de l'exercice I ayant au moins un point critique, esquisser les courbes de niveau de la fonction au voisinage du ou des points critiques.

[1] Ludwig Hesse, mathématicien Allemand du XIXe siècle, travailla essentiellement sur le développement de la théorie des fonctions algébriques et la théorie des invariants. Il introduit la matrice hessienne en 1842 lors de l'étude de courbes quadratiques et cubiques.

Ludwig Otto Hesse (1811–1874)

Exercice III

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

1. Déterminer les points critiques de f et leurs natures.

2. Esquisser les courbes de niveau de f au voisinage des points critiques.

3. En déduire les courbes de niveau de f.

Exercice IV

Sur la feuille annexe, les fonctions de l'exercice I et la fonction de l'exercice III sont représentées. Pour l'exercice I le numéro de la question dans laquelle apparait la fonction est parfois indiquée. Compléter la correspondance.

Exercice V

1. Est-il possible qu'une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ait deux minima locaux différents et pas de maximum local ? Donner un exemple ou démontrer que cela est impossible.

2. Est-il possible qu'une fonction C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ait deux minima locaux différents et pas de maximum local ? Donner un exemple ou démontrer que cela est impossible.

Exercice VI

On considère les formes quadratiques q suivantes. Dans chaque cas dites si q est positive, négative ou ni l'un l'autre.

1. $q(x) = x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2$

2. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 + 4x_3^2$

3. $q(x) = 2x_1^2 + 8x_2x_3 + 3x_4^2 + 2x_1x_4$

4. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Exercice VII

Calculer les extrema de la fonction f donnée.

1. $f(x, y, z) = 8x^2 + y^2 + z^2 + xz + zy + 1$

2. $f(x, y, z) = 19 - 19x + 8x^2 + y^2 + y + z^2 - 5z + xz + yz$

3. $f(x, y, z, t) = tx^2 + ty^2 + z^3$