Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Interrogation du 13/03/2002

corrigé

Exercice I

Nous noterons $f(x) = x - \ln x$.

1. Le réel x est un équilibre si et seulement si $x = f(x)$ c'est-à-dire si et seulement si $-\ln x = 0$ ce qui équivaut à $x = 1$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Ainsi $|f'(1)| = 0 < 1$ donc 1 est un équilibre stable.

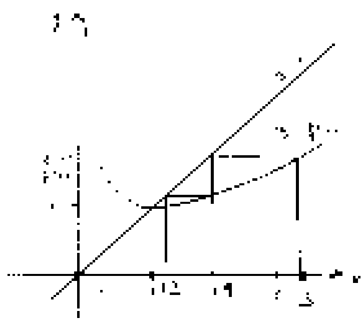
3. Etudions les variations de f sur $]0, +\infty[$. On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $1 - \frac{1}{x} > 0$ ce qui équivaut à $x > 1$. Ainsi f est décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty$. Elle admet un minimum en 1 qui est $f(1) = 1$. Ainsi

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \ f(x) \geq 1$$

Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence u_n est définie et $u_n > 0$ alors

- (H_0) est vraie puisque u_0 est définie et $u_0 > 0$
- Supposons que (H_n) est vraie alors u_n est définie et $u_n > 0$ donc $f(u_n) > 0$ donc u_{n+1} est définie et $u_{n+1} > 0$ donc (H_{n+1}) est vraie.

4. Il est facile de calculer f en $\frac{1}{e}$, 1 et e. En utilisant ces points et les variations de f on en déduit l'esquisse de la courbe de f. Puis on trace la première bissectrice et on construit géométriquement les termes. On trouve $u_1 = 1.9$ et $u_2 = 1.2$.



Exercice II

Considérons le polynôme caractéristique

$$X^2 - 2X + 1$$

ce polynôme a 1 comme racine double. Ainsi il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

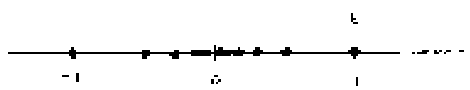
$$u_n = C_1 1^n + C_2 n 1^n$$

donc $u_n = C_1 + nC_2$. Or $1 = u_0 = C_1$ et $5 = u_1 = C_1 + C_2$ donc $C_2 = 4$ et par suite

$$u_n = 4n + 1$$

Exercice III

1.



2. L'ensemble E n'est par fermé puisque $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite à valeurs dans E qui converge vers $0 \notin E$.

Exercice IV

En plus de la démonstration donnée dans le cours, on propose une autre méthode :
Soit (H_n) l'hypothèse "l'intersection de n ouverts est un ouvert".

- Montrons (H_2). Soient A_1 et A_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$.
  - Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors $\forall x \in A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2$ est voisinage de x (en effet $\forall x \in \emptyset$ toute propriété est vraie)
  - Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ alors soit $x \in A_1 \cap A_2$. Comme A_1 est un ouvert et que $x \in A_1$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon[\subset A_1$.
    De même $\exists \varepsilon_2 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2[\subset A_1$.
    Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. On a $\varepsilon > 0$ et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon_1[\subset A_1 \cap A_2$. Ainsi $A_1 \cap A_2$ est voisinage de x.
    On a démontré que $A_1 \cap A_2$ est voisinage de chacun de ses points. Il est donc ouvert.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que (H_n) soit vérifiée.
  Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$, n ouverts. Par (H_n) on a $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ ouvert. En outre $A \cap A_n$ est un ouvert grace à (H_2) Donc $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}$ est un ouvert. Donc H_{n+1} est vraie

En conclusion, l'intersection de n ouverts est un ouvert.