

## Interrogation du 13/03/2002

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Toutes les réponses doivent être justifiées à l'exception des réponses aux questions I.4 et III.1.**

### Exercice I (8 points)

On considère la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation ?
2. Pour chaque équilibre dites s'il est localement stable ou instable.
3. Etudier les variations de  $x \mapsto x - \ln x$ . Montrer que si  $u_0 \in ]0, +\infty[$  alors  $u_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Au moyen d'un graphique, que vous réaliserez sur le papier millimétré joint, déterminez approximativement la valeur des 3 premiers termes de la suite issue de la condition initiale  $u_0 = 3$ .

### Exercice II (4 points)

Dérécursiver la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

### Exercice III (4 points)

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement  $E$
2. Cet ensemble est-il un fermé ?

### Exercice IV (4 points)

Redémontrer ce résultat de cours : "l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert".