

## Interrogation du 18/12/2001

*correction*

### Exercice I

On rappelle que pour un réel  $A$  on a  $|A| = A$  si  $A \geq 0$  et  $|A| = -A$  si  $A < 0$ . Or  $x^2 - 4x + 3$  a pour discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$ , on a  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ , par suite  $x^2 - 4x + 3$  est négatif sur  $[1, 3]$  et positif sur  $] - \infty, 1[ \cup ] 3, +\infty[$ . Cela nous permet de faire le tableau suivant

$x$	$-\infty$	$-9$	$1$	$3$	$+\infty$
$ x^2 - 4x + 3 $	$x^2 - 4x + 3$	$x^2 - 4x + 3$	$-x^2 + 4x - 3$	$x^2 - 4x + 3$	
$ x + 9 $	$-x - 9$	$x + 9$	$x + 9$	$x + 9$	
Inéquation	$x^2 - 3x + 12 \leq 0$	$x^2 - 5x - 6 \leq 0$	$-x^2 + 3x - 12 \leq 0$	$x^2 - 5x - 6 \leq 0$	
Solutions	$\emptyset$	$[-1; 1]$	$[1, 3]$	$[3, 6]$	

Ainsi les solutions sont dans l'ensemble  $S = [-1, 6]$ .

### Exercice II

Si  $q = 1$  alors  $\sum_{i=1}^n q^i = n$  dont la limite est  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ainsi la série diverge. Sinon  $q \neq 1$ , alors

$$\sum_{i=1}^n q^i = q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

Par suite, la série converge si et seulement si  $|q| < 1$  et la limite est alors

$$\frac{q}{1 - q}$$

### Exercice III

1. L'application  $f$  n'est pas injective en effet  $f(1, 0) = 1 = f(2, 1)$ . Elle n'est pas non plus surjective car  $\pi$  n'a pas d'antécédent, en effet  $f(p, q) \in \mathbb{Q}$  pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  et  $\pi \notin \mathbb{Q}$ . Par suite  $f$  n'est pas bijective.

2. Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . On suppose que  $x$  et  $y$  sont positifs.

**Etape 1 :** On choisit un pas en  $\frac{1}{2^n}$  inférieur à  $y - x$ .

Soit  $h = y - x$  et  $n$  tel que  $\frac{1}{2^n} < h$ . Un tel entier  $n$  existe toujours, car il suffit de prendre  $n$  tel que  $2^n > \frac{1}{h}$ , il suffit donc de prendre  $n > \frac{-\ln h}{\ln 2}$  par exemple  $n = E(\frac{-\ln h}{\ln 2}) + 1$ .

**Etape 2 :** On choisit  $p$  le nombre de pas nécessaire pour que  $x \leq \frac{p}{2^n} \leq y$ .

Considérons  $p = E(2^n x)$  on a :

$$\begin{aligned} p &\leq 2^n x < p + 1 \\ \frac{p}{2^n} &\leq x < \frac{p+1}{2^n} \end{aligned}$$

donc  $x < f(p + 1, n)$  et  $f(p + 1, n) \leq x + \frac{1}{2^n} \leq y$  donc

$$x < f(p + 1, n) \leq y$$

La démonstration dans le cas où  $x$  et  $y$  sont négatifs est analogue, la démonstration dans le cas où  $x$  et  $y$  sont de signes contraires est triviale puisqu'il suffit de considérer  $0 = f(0, 1)$ . Ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, x \leq f(p, n) \leq y$$

donc  $D$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .