

Interrogation du 18/12/2001

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|x^2 - 4x + 3| \leq |x + 9|$

Exercice II (6 points)

Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^n q^i$$

Discuter la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ selon la valeur du paramètre réel q et préciser la valeur de la limite lorsqu'il y a convergence.

Exercice III (8 points)

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \frac{p}{2^q} \end{aligned}$$

1. Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Soit $D = \{f(p, q), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$. Montrer que D est dense dans \mathbb{R} .