Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Examen du 9/04/2002

Corrigé

Exercice I

1. L'ensemble $]1,2[$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A donc

$$\overset{\circ}{A} =]1,2[$$

L'ensemble $[1,2] \cup \{3\}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A donc

$$\overline{A} = [1,2] \cup \{3\}$$

La frontière de A est

$$\partial A = ([1,2] \cup \{3\}) \setminus (]1,2[) = \{1,2,3\}$$

3 est un point isolé puisque $]3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}[\cap A = \{3\}$ en outre $\forall x \in [1,2[, \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \{x\}$ donc

$$A^* = \{3\}$$

or (A', A^*) forme une partition de $\overline{A}$ ainsi

$$A' = [1,2]$$

2. L'ensemble A n'est pas ouvert puisque $A \neq \overset{\circ}{A}$. L'ensemble A n'est pas fermé puisque $A \neq \overline{A}$, en particulier A n'est pas compact.

3. Posons $\Omega_0 =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup]3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}[$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ posons $\Omega_i =]1, 2-\frac{1}{i}[$. La famille $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de A par des ouverts puisque $A \subset \cup_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$.

Supposons que l'on puisse en extraire un sous-recouvrement fini. Soit $I \subset \mathbb{N}$ fini, notons $M = \max I$, on a $\cup_{i=0}^{M}\Omega_i = \Omega_M$ donc $2 - \frac{1}{M+1} \notin A$ donc $A \not\subset \cup_{i=0}^{M}\Omega_i$. Contradiction.

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $K_n \neq \emptyset$, considérons $u_n \in K_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K_0 qui est borné donc elle est elle-même bornée. Le théorème de Bolzano-Weirestrass garantie l'existence d'une valeur d'adhérence a.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Cette suite est une suite convergente d'éléments du fermé K_0, elle converge donc dans K_0 par suite $a \in K_0$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $a \in K_i$. Pour $n \geq i$ on a $v_n \in K_i$, la suite est donc une suite convergente d'élements du fermé K_i, ainsi sa limite a est dans K_i.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$ on a $a \in \cap_{i=0}^{+\infty}K_i$ par suite $\cap_{i=0}^{+\infty}K_i \neq 0$.

Exercice III

1. On a $M(5,]1,2[) = \{|5-a|,\ a \in]1,2[\} =]3,4[$. Donc $d(5,]1,2[) = \inf]3,4[$. L'ensemble des minorants de $]3,4[$ est $]-\infty, 3]$ dont le plus grand élément est 3 ainsi $\inf]3,4[= 3$ d'où

$$d(5,]1,2[) = 3$$

2. Supposons que $x \in \overline{A}$ alors $\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ donc tel que $|x-a| < \varepsilon$. Par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in M(x,A), y < \varepsilon$$

donc tout minorant de $M(x,A)$ est inférieur ou égal à 0. Comme 0 est minorant de $M(x,A)$ il en résulte que le plus grand des minorants est 0. Par suite $d(x,A) = 0$.

3. Supposons que $d(x,A) = 0$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $|x-a| < \varepsilon$ donc tel que $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$$

donc $x \in \overline{A}$.

Exercice IV

1. Soit $x \in (A \cup B)^*$, les 6 lignes suivantes sont impliquées

$$\exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \cup B) = \{x\}$$

$$\exists \varepsilon > 0, (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A) \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B) = \{x\}$$

$$\exists \varepsilon > 0, (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A) = \{x\} \text{ ou } (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B) = \{x\}$$

$$x \in A^* \text{ ou } x \in B^*$$

$$x \in A^* \cup B^*$$

Ainsi $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$. L'inclusion réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \mathbb{Q},\ B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

en effet $A^* = \emptyset$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cup B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cup B)^* = \mathbb{R}$.

2. Soit $x \in (A^* \cap B^*)$ alors $x \in A^*$ et $x \in B^*$ donc

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_1 > 0,]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\cap A = \{x\} \\ \exists \varepsilon_2 > 0,]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\cap B = \{x\} \end{cases}$$

posons alors $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \cap B) = \{x\}$$

donc $x \in (A \cap B)^*$. Ainsi $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$. L'inclusion réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \{0\},\ B = \mathbb{R}$$

en effet $A^* = A$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cap B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cap B)^* = A^* = \{0\}$.