Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Examen du 9/04/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (5 points)

Soit $A = [1, 2[\cup \{3\}$

1. Calculer $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, ∂A, A^* et A'

2. L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-ce un compact ?

3. Trouver un recouvrement de A par des ouverts dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

Exercice II (4 points)

Montrer que pour toute famille d'ensembles fermés bornés non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ avec $K_{n+1} \subset K_n$ on a

$$\cap_{n=0}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$$

Exercice III (6 points)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$, notons $M(x, A) = \{|x - a|,\ a \in A\}$ et $d(x, A)$ le réel $\inf M(x, A)$.

1. Calculer $M(5,]1, 2[)$ et $d(5,]1, 2[)$.

2. Montrer que si $x \in \overline{A}$ alors $d(x, A) = 0$

3. Réciproquement, montrer que si $d(x, A) = 0$ alors $x \in \overline{A}$

Exercice IV (5 points)

Soit A et B inclus dans $\mathbb{R}$

1. Démontrer que $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$ et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie.

2. Démontrer que $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$ et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie.