Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
Semestre 1

Examen du 24/01/2002

correction

Exercice I

On sait que x et y^2 sont racines du trinôme $X^2 - 13X + 36 = 0$. Or le discrimant de ce trinôme est $\Delta = 13^2 - 4 \times 36 = 25$, on calcule les racines et on obtient $\frac{13-5}{2} = 4$ et $\frac{13+5}{2} = 9$. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y^2 = 13 \\ xy^2 = 36 \end{array} \right.$$

est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y^2 = 9 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 9 \\ y^2 = 4 \end{array} \right.$$

les solutions sont donc

$$(4;3),\ (4;-3),\ (9;2),\ (9;-2)$$

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \mathrm{E}(-\ln\varepsilon) + 1$ si $\mathrm{E}(-\ln\varepsilon) + 1 > 0$ et $N = 0$ sinon. On a

$$\begin{aligned} n > N &\Rightarrow n > -\ln\varepsilon \\ &\Rightarrow e^{-n} < \varepsilon \\ &\Rightarrow |e^{-n} - 0| < \varepsilon \end{aligned}$$

ainsi

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |e^{-n} - 0| < \varepsilon$$

donc $\lim e^{-n} = 0$.

Exercice III

1.

Minorant : On a $(-1)^n \geq -1$ et $\frac{1}{2^n} > 0$ donc $u_n > -1$. Ainsi -1 est un minorant de A.

Borne Inférieure : Supposons qu'il existe un minorant $m > -1$ de A. On a $m + 1 > 0$, soit alors p un entier tel que

$$p > -\frac{\ln(m+1) + \ln 2}{\ln 4} \tag{1}$$

les lignes suivantes sont logiquement équivalentes à (1).

$$\ln(4^p) > -\ln(m+1) - \ln 2$$

$$\begin{aligned}
\ln(2\times 4^p) &> \ln\frac{1}{m+1}\\
2\times 4^p &> \frac{1}{m+1}\\
\frac{1}{2\times 4^p} &< m+1\\
-1+\frac{1}{2\times 4^p} &< m\\
(-1)^{2p+1}+\frac{1}{2^{2p+1}} &< m\\
u_{2p+1} &< m
\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec m est un minorant de A. Ainsi tous les minorants de A sont inférieurs à -1 et donc le plus grand des minorants est -1. Par suite $\inf A = -1$

Plus petit élément : Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > -1$ il vient $-1 \notin A$ donc A n'admet pas de plus petit élément.

2. Les suites extraites

$$\begin{aligned}
v_n &= 1+\frac{1}{2^{2p}}\\
w_n &= -1+\frac{1}{2^{2p+1}}
\end{aligned}$$

convergent respectivement vers 1 et -1 donc 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de (u_n).

Exercice IV

1. Comme les quantités sont positives $e^x = x^n$ équivaut à $\ln(e^x) = \ln(x^n)$ ce qui équivaut à $x = n\ln x$ c'est-à-dire $\varphi_n(x) = 0$.

2. On a $\varphi_n(x) = x - n\ln(x)$ donc $\varphi_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}$. Ainsi φ_n est strictement décroissante sur $]0, n[$ et strictement croissante sur $]n, +\infty[$.

Comme φ_n est strictement décroissante sur $]0, n[$, continue, $\varphi_n(1) = 1 > 0$ et $\varphi_n(n) = n - n\ln(n) = n(1-\ln n) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe une racine unique dans $]1, n[$.

D'autre part $\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$, comme φ_n est continue, strictement croissante sur $]n, +\infty[$ et que $\varphi_n(n) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe une racine unique dans $]n, +\infty[$.

On a donc $1 < u_n < n < v_n$.

3. $\lim n = +\infty$ donc $\lim v_n = +\infty$.

4. $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1} - (n+1)\ln u_{n+1} = 0$ donc $\ln u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1}$. D'autre part $\varphi_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln u_{n+1}$ donc $\varphi_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_{n+1}\frac{n}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1}$.

5. Comme $u_{n+1} > 0$ et $n+1 > 0$ on a $\varphi_n(u_{n+1}) > 0$, d'autre part on a vu que $\varphi_n(n) < 0$ puisque $n \geq 3$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que $u_n \in]u_{n+1}, n[$ donc en particulier $u_{n+1} < u_n$.

6. Puisque $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante on a $u_n < u_3$ par suite $1 < u_n < u_3$ d'où

$$\frac{1}{n} < \frac{u_n}{n} < \frac{u_3}{n}$$

comme $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{u_3}{n} = 0$ le théorème des gendarmes dit que $\lim \frac{u_n}{n} = 0$. Or $\varphi_n(u_n) = 0$ entraine $u_n - n\ln u_n = 0$ donc $\frac{u_n}{n} = \ln u_n$ ainsi $\lim \ln u_n = 0$. En conséquence $\lim u_n = 1$.