Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
Semestre 1

Examen du 24/01/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (4 points)

On sait que $13 \times 13 - 4 \times 36 = 25$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y^2 = 13 \\ xy^2 = 36 \end{cases}$$

Exercice II (4 points)

En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$$

Exercice III (5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$$

et soit $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Trouver (s'ils existent) un minorant, une borne inférieure, le plus petit élément de A.

2. Montrer que 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice IV (7 points)

Soit $n \geq 3$ un entier. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, des racines réelles positives de l'équation

$$e^x = x^n \tag{1}$$

On notera φ_n l'application définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = x - n\ln(x)$$

1. Montrer que (1) est équivalente à $\varphi_n(x) = 0$.

2. Etudier les variations de φ_n et en déduire que (1) a deux solutions. Nous noterons u_n la plus petite d'entre elles et v_n la plus grande. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 3}$ et $(v_n)_{n\geq 3}$ vérifient

$$1 < u_n < n < v_n$$

3. Calculer $\lim v_n$.

4. Montrer que $\varphi_n(u_{n+1}) = \frac{u_{n+1}}{n+1}$.

5. Quels sont les signes de $\varphi_n(u_{n+1})$ et de $\varphi_n(n)$? En déduire que $u_{n+1} < u_n$.

6. En considérant la limite de $\ln u_n$, calculer $\lim u_n$.