Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Devoir à rendre le 29/3/2002

correction

Exercice I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons $F_n = [n, +\infty[$, alors F_n est non vide, il est fermé et il vérifie $F_{n+1} \subset F_n$. Soit $F = \cap_{n=0}^{+\infty} F_n$. Soit $a \in \mathbb{R}$ alors pour $n = \mathrm{E}(a) + 1$ on a $a \notin F_n$ donc $a \notin F$. Ainsi $F = \emptyset$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons $B_n =]0, \frac{1}{n+1}]$, alors B_n est non vide, il est borné et il vérifie $B_{n+1} \subset B_n$. Soit $B = \cap_{n=0}^{+\infty} B_n$. Soit $a \in \mathbb{R}$ alors :

- Si $a \leq 0$ ou $a > 1$ on a $a \notin B_0$ donc $a \notin B$
- Sinon $a \in]0, 1]$ soit alors $n = \mathrm{E}(\frac{1}{a})$ on a $\frac{1}{n+1} < a$ donc $a \notin B_n$ donc $a \notin B$.

Ainsi $B = \emptyset$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $K_n \neq \emptyset$, considérons $u_n \in K_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K_0 qui est borné donc elle est elle-même bornée. Le théorème de Bolzano-Weirestrass garantie l'existence d'une valeur d'adhérence a.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Cette suite est une suite convergente d'éléments du fermé K_0, elle converge donc dans K_0 par suite $a \in K_0$.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $a \in K_i$. Pour $n \geq i$ on a $v_n \in K_i$, la suite est donc une suite convergente d'élements du fermé K_i, ainsi sa limite a est dans K_i.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$ on a $a \in \cap_{i=0}^{+\infty} K_i$ par suite $\cap_{i=0}^{+\infty} K_i \neq \emptyset$.

Exercice II

1. Soit (H_n) l'hypothèse : "Il existe des comptacts $K_1, \ldots, K_n$ d'interieur non vides tels que $K_n \subset K_0$ et $K_n \subset I \cap (\cap_{i=0}^{n} O_i)$."

- $I \cap O_0$ est non vide puisque O_0 est dense dans $\mathbb{R}$ et c'est un ouvert puisque c'est l'intersection de deux ouverts. Ainsi il existe un intervalle ouvert $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ inclus dans $I \cap O_0$ (pour un certain $x \in I \cap O_0$ et un certain $\varepsilon > 0$.) Posons alors

$$K_0 = [x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}] \subset I \cap O_0$$

  l'interieur de K_0 est non vide. Ainsi (H_0) est vraie.

- Supposons (H_n) vraie alors il existe des comptacts $K_1, \ldots, K_n$ d'interieur non vides tels que $K_n \subset K_0$ et $K_n \subset I \cap (\cap_{i=0}^{n} O_i)$. Comme K_n est d'interieur non vide il contient un intervalle ouvert J. De manière analogue à ce qui précéde $J \cap O_{n+1}$ est non vide et ouvert, il contient un intervalle ouvert $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ inclus dans $J \cap O_{n+1}$ (pour un certain $x \in J \cap O_{n+1}$ et un certain $\varepsilon > 0$.) Posons alors

$$K_{n+1} = [x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}] \subset J \cap O_{n+1}$$

  l'interieur de K_{n+1} est non vide. En outre $K_{n+1} \subset J \subset K_n$ donc $K_{n+1} \subset K_0$ et $K_{n+1} \subset I \cap (\cap_{i=0}^{n} O_i) \cap O_{n+1}$ donc $K_{n+1} \subset I \cap \left(\cap_{i=0}^{n+1} O_i\right)$. Ainsi (H_{n+1}) est vraie.

2. En vertu de la question 3 de l'exercice I, $K = \cap_{n=0}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$ et $K \subset I \cap (\cap_{i=1}^{+\infty} O_i)$ donc $I \cap (\cap_{i=1}^{+\infty} O_i) \neq \emptyset$. Par suite $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$ on a $]x,y[\cap(\cap_{i=1}^{+\infty} O_i) \neq \emptyset$ donc $\exists z \in (\cap_{i=1}^{+\infty} O_i)$ tel que $x < z < y$ donc $(\cap_{i=1}^{+\infty} O_i)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice III

1. F est un fermé d'interieur vide équivaut à $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ équivaut à $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{F} = \mathbb{R}$ équivaut à $\overline{\mathbb{R} \setminus F} = \mathbb{R}$ équivaut à $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap(\mathbb{R} \setminus F) \neq \emptyset$. Pour a et b deux réels notons $x = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = b - a$ on a $]a,b[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, il y a donc équivalence avec $]a,b[$ contient des éléments de $\mathbb{R} \setminus F$ c'est-à-dire $\mathbb{R} \setminus F$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles fermés d'interieur vide indexée par $\mathbb{N}$ définie par $O_n = \mathbb{R} \setminus F_n$. Ces ensembles sont ouverts et dense dans $\mathbb{R}$. Leur intersection est dense dans $\mathbb{R}$ en vertu de l'exercice II. donc le complementaire de cette intersection est d'interieur vide donc $\cup_{n=0}^{+\infty} F_n$ est d'interieur vide.

3. Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable alors il existe une application f bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Notons F_n le singleton $\{f(n)\}$, ce fermé est d'interieur vide. La question précédente garanti que $\cup_{n=0}^{+\infty} F_n$ est d'interieur vide donc $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$, contradiction! Ainsi $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.