Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
Semestre 2

Devoir à rendre le 29/3/2002

Topologie

Exercice I

1. Montrer qu'il existe une famille d'ensembles fermés non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ avec $F_{n+1} \subset F_n$ tels que

$$\cap_{n=0}^{+\infty} F_n = \emptyset$$

2. Montrer qu'il existe une famille d'ensembles bornés non vides $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ avec $B_{n+1} \subset B_n$ tels que

$$\cap_{n=0}^{+\infty} B_n = \emptyset$$

3. Montrer que pour toute famille d'ensembles fermés bornés non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ avec $K_{n+1} \subset K_n$ on a

$$\cap_{n=0}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$$

Exercice II

Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles ouverts denses dans $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. Soit I un intervalle ouvert non vide.

1. Montrer qu'il existe une famille d'ensembles compacts d'intérieur non vide $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ avec $K_{n+1} \subset K_n$ telle que

$$K_n \subset I \cap \left(\cap_{i=0}^{+\infty} O_i\right)$$

2. Montrer que $\cap_{n=0}^{+\infty} O_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice III

1. Montrer que le complémentaire d'un fermé d'interieur vide est dense dans $\mathbb{R}$ et que le complémentaire d'un ouvert dense est un fermé d'interieur vide.

2. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles fermés d'interieur vide indexée par $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\cup_{n=0}^{+\infty} F_n$$

est d'interieur vide.

3. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable