

Devoir du 27/02/2002

correction

Exercice I

1. On a

$$\begin{aligned}u_3 &= 2c + b - 2a \\u_4 &= 5c - 4a \\u_5 &= 10c - 10a + b \\u_6 &= 21c - 20a\end{aligned}$$

On donne $u_4 = u_5 = 0$ et $u_6 = -16$. Le système (S) que doivent vérifier a , b et c est alors le suivant

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -10 & 1 & 10 \\ -20 & 0 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notons

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -10 & 1 & 10 \\ -20 & 0 & 21 \end{bmatrix} ; \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Il s'agit de résoudre $Mx = d$. Procédons par éliminations sur la matrice augmentée $M' = [M \ d]$

$$M' = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 0 \\ -10 & 1 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & 21 & 1 \end{bmatrix}$$

Le pivot est -4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad EM' = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{bmatrix}$$

Le système (S) est alors équivalent au système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -4a + 5c = 0 \\ b - \frac{5}{2}c = 0 \\ -4c = -16 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ c = 4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (S) est donc $\{(5; 10; 4)\}$, nous devons donc prendre $a = 5$, $b = 10$ et $c = 4$ pour avoir $u_4 = u_5 = 0$ et $u_6 = -16$.

D'autre part la matrice EM est triangulaire supérieure, notons la U , on a

$$U = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

comme $EM = U$ on a $M = E^{-1}U$, posons $L = E^{-1}$ on a

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a $M = LU$.

2. La donnée de u_4, u_5 et u_6 mène à une système (S) dont le vecteur

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

est solution $(Mx = d)$. Or la matrice M du système est inversible, en effet elle admet 3 pivots : $-4, 1$ et -4 , ainsi (S) admet une solution unique. Donc les réels a, b et c sont déterminés de manière unique pour toute donnée de u_4, u_5 et u_6 .

Exercice II

1. On a

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

On pose donc

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. En appliquant la méthode de Gauss-Jordan on a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. On effectue le calcul, il vient

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Soit (H_n) l'hypothèse

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

alors

- (H_1) est vraie en vertu de la question 3.

- Supposons (H_n) vraie, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc (H_{n+1}) est vraie.

ainsi $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Soit (H_n) l'hypothèse

$$D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors

- (H_1) est vraie
- Supposons (H_n) vraie, alors

$$D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$D^{n+1} = DD^n = D \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc (H_{n+1}) est vraie.

Ainsi on a établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 2^n + 1/6 (-1)^n - 1/2 & 1/2 - 1/2 (-1)^n & -4/3 2^n + 1/3 (-1)^n + 1 \\ 2/3 2^n - 1/6 (-1)^n - 1/2 & 1/2 + 1/2 (-1)^n & -2/3 2^n - 1/3 (-1)^n + 1 \\ 1/3 2^n + 1/6 (-1)^n - 1/2 & 1/2 - 1/2 (-1)^n & -1/3 2^n + 1/3 (-1)^n + 1 \end{bmatrix}$$

6. Pour tout entier $n \geq 2$ on a $X_n = A^{n-2}X_2$. Comme

$$X_2 = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

et

$$A^{n-2} = \begin{bmatrix} 4/3 2^{n-2} + 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2 & 1/2 - 1/2 (-1)^{n-2} & -4/3 2^{n-2} + 1/3 (-1)^{n-2} + 1 \\ 2/3 2^{n-2} - 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2 & 1/2 + 1/2 (-1)^{n-2} & -2/3 2^{n-2} - 1/3 (-1)^{n-2} + 1 \\ 1/3 2^{n-2} + 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2 & 1/2 - 1/2 (-1)^{n-2} & -1/3 2^{n-2} + 1/3 (-1)^{n-2} + 1 \end{bmatrix}$$

il vient

$$X_n = \begin{bmatrix} \left(4/3 2^{n-2} + 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2\right) c + \left(1/2 - 1/2 (-1)^{n-2}\right) b + \left(-4/3 2^{n-2} + 1/3 (-1)^{n-2} + 1\right) a \\ \left(2/3 2^{n-2} - 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2\right) c + \left(1/2 + 1/2 (-1)^{n-2}\right) b + \left(-2/3 2^{n-2} - 1/3 (-1)^{n-2} + 1\right) a \\ \left(1/3 2^{n-2} + 1/6 (-1)^{n-2} - 1/2\right) c + \left(1/2 - 1/2 (-1)^{n-2}\right) b + \left(-1/3 2^{n-2} + 1/3 (-1)^{n-2} + 1\right) a \end{bmatrix}$$

7. La première composante de X_n donne le terme général de $(u_n)_{n \geq 0}$ pour $n \geq 2$. On a

$$u_n = (4/3 2^{n-2} + 1/6 (-1)^n - 1/2) c + (1/2 - 1/2 (-1)^n) b + (-4/3 2^{n-2} + 1/3 (-1)^n + 1) a$$

Ce qui donne, pour $n \geq 2$

$$u_n = \left(a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \right) + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \right) (-1)^n + \frac{c-a}{3} 2^n$$

et cette formule est également vraie pour $n \in \{0; 1; 2\}$.

8. Si $c > a$ alors

$$u_n \geq \frac{c-a}{3} 2^n - \left| \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \right| + \left(a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \right)$$

or $\lim 2^n = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$.

Si $c < a$ alors de manière analogue on a $\lim u_n = -\infty$.

Enfin, si $c = a$ alors $u_n = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}(-1)^n$. Dans ce cas, si $a = b$ on a $u_n = a$ et sa limite est a et si $a \neq b$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite.