Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Devoir à rendre le 27/2/2002

Suites récurrentes

Soient a, b et c trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \\ u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Dans ce devoir, on se propose d'étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I

1. Trouver a, b et c tels que $u_4 = u_5 = 0$ et $u_6 = -16$. On écrira le système sous forme matricielle et on résoudra en précisant à chaque étape les matrices d'éliminations. En outre on précisera la décomposition LU.

2. Montrer que la donnée de u_4, u_5 et u_6 determine de manière unique les réels a, b et c.

Exercice II

Considérons la matrice P et, pour tout $n \geq 2$, le vecteur X_n défini par

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

1. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Calculer P^{-1}

3. Notons $D = P^{-1}AP$. Montrer que

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Montrer que $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$.

5. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \geq 2$.

6. En déduire X_n en fonction de a, b c et n pour tout $n \geq 2$.

7. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Discuter selon a, b et c la limite $\lim u_n = +\infty$.